Научная статья
УДК 539.374:620.193.52:669.295

ВЛИЯНИЕ ФАКТОРА ВРЕМЕНИ НАВОДОРОЖИВАНИЯ НА ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ СПЛАВА ТИТАНА

В.О. Бажутова[1,*]

[1] Тульский государственный университет, Тула, Россия,
[*] E-mail: kuznecova_violetta@mail.ru

Аннотация. В работе проводится математическое моделирование тонкой пологой оболочки сферической формы круглой в плане под действием предельных нагрузок и влиянием агрессивных условий эксплуатации. Используемый материал – титановый сплав марки ВТ1-0, работающий в среде с высоким содержанием водорода. Оболочка испытывает равномерное внешнее давление по всей поверхности, в то время как агрессивная среда действует изнутри оболочки, что усиливает негативное коррозионное действие. Для анализа применяется метод нормированного пространства напряжений при учете тройной нелинейности моделируемого процесса. Разработана методика, позволяющая оценить воздействие водородного насыщения металла и его влияния на механическое поведение в условиях коррозии. Создана система дифференциальных уравнений для данной сферической оболочки, учитывающая нелинейные зависимости по трем основным параметрам нелинейности. Проведенное исследование выявило ключевые особенности влияния водородного насыщения на деформационное и предельное состояние оболочки, включая эффект ухудшения механических свойств из-за хрупкости материала под воздействием водорода. Полученные численные данные демонстрируют влияние напряженно-деформированных состояний на характеристики титановых сплавов при больших деформациях и в условиях коррозии.

Ключевые слова: *водородосодержащая среда; водородное охрупчивание; диффузия; сферическая оболочка; титановый сплав; конечно-разностная аппроксимация; разносопротивляемость.*

Для цитирования: Бажутова В.О. Влияние фактора времени наводороживания на предельное состояние сферических оболочек из сплавов титана // *Вестник науки и образования Северо-Запада России*. 2025. Т. 11. № 3. С. 82–94.

Original article

INFLUENCE OF HYDROGENATION TIME FACTOR ON THE LIMITING STATE OF SPHERICAL SHELLS MADE OF TITANIUM ALLOY

V.O. Bazhutova[1,*]

[1] Tula State University, Tula, Russia
[*] E-mail: kuznecova_violetta@mail.ru

Abstract. The paper presents mathematical modeling of a thin shallow spherical shell, circular in plan, under extreme loads and aggressive operating conditions. The material used is titanium alloy grade VT1-0, operating in an environment with a high hydrogen content. The shell experiences uniform external pressure over the entire surface, while the aggressive environment

© Бажутова В.О. 2025

acts from inside the shell, which enhances the negative corrosion effect. For the analysis, the normalized stress space method is used, taking into account the triple nonlinearity of the modeled process. A technique has been developed that allows assessing the impact of hydrogen saturation of the metal and its effect on mechanical behavior under corrosion conditions. A system of differential equations has been created for this spherical shell, taking into account nonlinear dependencies for three main nonlinearity parameters. The study has revealed key features of the influence of hydrogen saturation on the deformation and limit state of the shell, including the effect of deterioration of mechanical properties due to the brittleness of the material under the influence of hydrogen. The obtained numerical data demonstrate the influence of stress-strain states on the characteristics of titanium alloys under large deformations and corrosion conditions.

Keywords: *hydrogen-containing environment; hydrogen embrittlement; diffusion; spherical shell; titanium alloy; finite-difference approximation; resistance difference.*

For citation: Bazhutova V.O. Influence of hydrogenation time factor on the limiting state of spherical shells made of titanium alloy. *Journal of Science and Education of North-West Russia*. 2025. Vol. 11. No. 3, pp. 82–94.

Введение

Водород, самый распространённый химический элемент в природе, оказался весьма интересным с точки зрения своего поведения в металлах и их сплавах, а также по многообразию влияния на их свойства. Наводороживание конструкционных материалов, в том числе титана, при различных технологических процессах и эксплуатации в агрессивных средах практически всегда приводит к водородной хрупкости (ВХ). Проблема взаимодействия водорода с металлами регулярно становится темой научных исследований.

Конструкции в форме сферических оболочек из титановых сплавов, такие как резервуары для водородного топлива, трубы АЭС, элементы самолетов и другие важные элементы, широко применяются во многих отраслях – от нефтегазовой и химической, до аэрокосмической и судостроения. В частности, в химической промышленности, нефтехимии, судостроении, а также в медицинских технологиях, сферические оболочки из титана играют ключевую роль в системах, функционирующих под давлением морской воды, в турбинных установках и энергетических объектах. Основным фактором, приводящим к разрушению таких конструкций, является совокупное воздействие механических нагрузок и агрессивных сред, что влечет за собой сложные физико-химические процессы на поверхности и в объеме материала. Важной научно-практической задачей становится изучение влияния динамики насыщения водородом на напряженно-деформированное и предельное состояние конструкций из титановых сплавов, что является актуальным направлением в строительной механике [1-5].

Ранее в статье [3] был рассмотрен аналогичный процесс для цилиндрической оболочки, выполненной из сплава титана ВТ1-0. Изменение геометрии задачи, в частности формы оболочки, приводит к необходимости построения новых разрешающих уравнений, физических и геометрических зависимостей, что в свою очередь приводит изменению зависимостей прогибов и напряжений от нагрузки.

Основная цель данной работы – изучение поведения сферической оболочки, имеющей круглую форму в плане и изготовленной из титанового сплава ВТ1-0, при воздействии равномерно распределенной внешней нагрузки до 5 МПа в среде с концентрацией водорода λ.

Теоретическая часть

Агрессивная среда действует изнутри оболочки, что является критическим фактором развития деформаций. Оболочка жестко закреплена по контуру. Оболочка является тонкой, следовательно, возможно применить гипотезы Кирхгофа-Лява. Радиус кривизны оболочки

составит $R=3$ м, стрела подъема $f=0{,}3$ м, радиус контура на плоскости – $a=1{,}5$ м, толщина оболочки $h=0{,}05$ м (рис. 1).

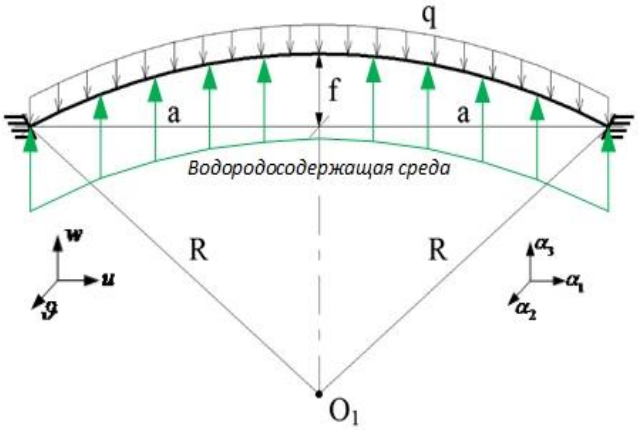


Рисунок 1 – Расчетная схема цилиндрической оболочки

В данной задаче параметры Ляме и главные кривизны имеют вид:

$$A=1;\quad B=R;\quad k_1=0;\quad k_2=k=R^{-1},$$

где R – радиус срединной поверхности оболочки.

Положение любой точки на поверхности рассматриваемой оболочки определим с использованием Гауссовых координат α_1,α_2 и α_3, далее примем $\alpha_1=r$, $\alpha_2=\theta$, $\alpha_3=z$, где u – горизонтальные перемещения по координате r (проекции α_1), ϑ – окружные перемещения, w – прогибы от действия поперечной нагрузки q. Тогда радиусы кривизны срединной поверхности оболочки примут вид: $R_1=R_2=R$, где R – радиус кривизны оболочки, отсюда значения главных кривизн принимают вид: $k_1=k_2=k=1/R$.

В работе используется нормированное пространство напряжений, связанное с октаэдрической площадкой, это означает, что напряженное состояние можно охарактеризовать модулем вектора полного напряжения на этой площадке S_0, углом ψ, образованным вектором S_0 с нормалью к этой площадке, а также углом φ – фазой напряжений [5]:

$$S_0=\sqrt{\sigma^2+\tau^2},$$

где $\sigma=\sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ – нормальное октаэдрическое напряжение; $\tau=\sqrt{S_{ij}S_{ij}/3}$ – касательное октаэдрическое напряжение; $S_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma$ – девиатор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера. С целью упрощения описания состояний деформируемых сред рекомендуется использовать угловое преобразование. ψ и φ к их тригонометрическим обозначениям: $\xi=\cos\psi=\sigma/S_0$; $\eta=\sin\psi=\tau/S_0$; $\cos 3\varphi=\sqrt{2}\,det(S_{ij})/\tau^3$; $i,j=1,2,3$. Модуль вектора S_0 – это пространственная норма, поэтому значения и величины ξ и η являются нормированными напряжениями, связанными условиями нормировки: $\xi^2+\eta^2=1$.

Потенциал деформации W [11], определяемый параметрами жесткости напряженного состояния, обозначим как функцию от ξ, η и фазового инварианта $\cos 3\varphi$. Для материалов, демонстрирующих нелинейные свойства, формально представим деформационный потенциал аналогично подходам пластической теории, вычисляя его как сумму квазилинейной и нелинейной составляющих:

ISSN 2413–9858

$$W = (F_e(\lambda) + G_e(\lambda)\xi)\sigma^2 + (H_e(\lambda) + I_e(\lambda)\xi + K_e(\lambda)\eta Cos\,3\varphi)\tau^2 + \\ + [(F_p(\lambda) + G_p(\lambda)\xi)\sigma^2 + (H_p(\lambda) + I_p(\lambda)\xi + K_p(\lambda)\eta Cos3\varphi)\tau^2]^n, \quad (1)$$

где $F_e(\lambda)$, $G_e(\lambda)$, $\dots F_p(\lambda)$, $G_p(\lambda)$, … – это квазилинейные и нелинейные функции деформационного потенциала, которые устанавливаются в зависимости от концентрации водорода в среде, n – степень нелинейности материала, с учетом влияния водородной среды на механические свойства материала, λ –содержание водорода во всём объеме оболочки. Функциональные зависимости материала определены на основе данных экспериментов по одноосному растяжению и сжатию.

Взаимосвязь между элементами тензора напряжений и деформаций описывается уравнением Кастильяно:

$$e_{kk} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{kk}}; \quad 2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \tau_{ij}}; \quad (i,j,k = 1,2,3, i \neq j) \\ e_{ij} = 2C_e(\lambda)\sigma_{kk}/3 + 2(A_e(\lambda) - C_e(\lambda))\sigma\delta_{ij}/3 + T_{ij}(\lambda), \quad (2)$$

здесь $T_{ij}^e(\lambda)$ – параметры, учитывающие чувствительность механических свойств материала к виду напряженного состояния в период квазилинейной деформации, а $T_{ij}^p(\lambda)$ – характеристики, учитывающие разносопротивляемость материала и нелинейный характер диаграмм деформирования, полученных в ходе экспериментальных исследований.

Ввиду осевой симметрии рассматриваемой задачи, геометрические зависимости возможно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_r = u_{,r} - kw + 0{,}5(w_{,r})^2; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} - kw; \\ \chi_r = -w_{,rr}; \quad \chi_\theta = -\frac{w_{,r}}{r}; \quad e_r = \varepsilon_r + z\chi_r; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + z\chi_\theta, \quad (3)$$

где $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ – относительные деформации срединной поверхности; χ_r, χ_θ – кривизны срединной поверхности.

Применяя уравнения Кастильяно (2) к потенциалу деформаций W (1), учитывая принятые гипотезы для заданной оболочки, связь деформаций и напряжений в матричном виде определим в виде:

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \end{Bmatrix} = [A]\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Обращая выражения (4), получим связь напряжений с деформациями в виде:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [B]\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \end{Bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $[B] = [A]^{-1}$; A_{11}, A_{12}, … – компоненты симметричной матрицы податливостей [A], являющиеся функциями деформационного потенциала W (1) [11].

В силу осесимметричности рассматриваемой задачи, систему уравнений, описывающую состояние сферической оболочки, сформулируем следующим образом [11]:

$$M_{r,rr} - M_{\theta,r} / r + 2M_{r,r} / r + k(N_r + N_\theta) + N_r w_{,rr} = -q;$$
$$N_{r,r} + (N_r - N_\theta)/r - k[M_{r,r} + (M_r - M_\theta)/r] = 0. \quad (6)$$

Определим величины усилий и моментов, прибегнув к классическому способу интегрирования напряжений по толщине. Этот переход, от напряжений к их интегральным характеристикам, не зависит от физических характеристик используемого материала [8]:

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz; \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz; \quad M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz; \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz \quad (7)$$

Моменты и усилия, выраженные через компоненты деформации срединной поверхности, могут быть представлены в следующем виде:

$$N_r = C_{11}(\lambda)\varepsilon_r + C_{12}(\lambda)\varepsilon_\theta + D_{11}(\lambda)\chi_r + D_{12}(\lambda)\chi_\theta;$$
$$N_\theta = C_{12}(\lambda)\varepsilon_r + C_{22}(\lambda)\varepsilon_\theta + D_{21}(\lambda)\chi_r + D_{22}(\lambda)\chi_\theta;$$
$$M_r = D_{11}(\lambda)\varepsilon_r + D_{12}(\lambda)\varepsilon_\theta + E_{11}(\lambda)\chi_r + E_{12}(\lambda)\chi_\theta; \quad (8)$$
$$M_\theta = D_{12}(\lambda)\varepsilon_r + D_{22}(\lambda)\varepsilon_\theta + E_{21}(\lambda)\chi_r + E_{22}(\lambda)\chi_\theta;$$

Функции материала определяем на основе объемного содержания водорода, учитывая влияние степени насыщения оболочки водородом, выраженное в виде:

$$C_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) dz \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) z dz \quad E_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) z^2 dz \quad (9)$$

Функции B_{ij} определяются концентрацией водорода λ в эксплуатационной среде и характером испытываемого напряженного состояния [12].

В систему уравнений (6) вносим интегральные характеристики (7), а также рассматриваем выражение для усилий и моментов, связанных с компонентами деформаций (8). Отсюда получим систему двух дифференциальных уравнений деформации оболочки:

$$2r^2 E_{12,rr} w_{,r} + 2r^2 E_{12,r} w_{,rr} - 2r^2 D_{12,rr} u - 2r^2 D_{12,r} u_{,r} + 2rD_{22,r} u + 2rD_{22} u_{,r} - 2D_{22} u -$$
$$- 2rE_{22,r} w_{,r} - 2rE_{22} w_{,rr} + 2E_{22} w_{,r} - 4r^2 D_{11,r} u_{,r} - 4r^2 D_{11} u_{,rr} + 4r^2 E_{11,r} w_{,rr} +$$
$$+ 4r^2 E_{11} w_{,rrr} - 2r^3 D_{11,rr} u_{,r} - 4r^3 D_{11,r} u_{,rr} - 2r^3 D_{11} u_{,rrr} + 2r^3 D_{11} (w_{,rr})^2 + 2r^3 E_{11,rr} w_{,rr} +$$
$$+ 4r^3 E_{11,r} w_{,rrr} + 2r^3 E_{11} w_{,rrrr} - 2r^3 kC_{11} (w_{,r})^2 - 2r^3 D_{11} u_{,rrr} + 2r^3 D_{11} (w_{,rr})^2 + 2r^3 E_{11,rr} w_{,rr} +$$
$$- 2r^3 kC_{12} w_{,r} w_{,r} + 2r^3 w_{,rr} C_{11} kw - 2r^3 w_{,rr} C_{11} (w_{,r})^2 + 2r^3 w_{,rr} C_{12} kw +$$
$$+ 2r^3 w_{,rr} C_{11} kw + 2r^3 w_{,rr} C_{12} kw - 2r^3 kC_{12} u_{,r} +$$
$$+ 2r^3 C_{22} k^2 w - 2r^3 w_{,rr} C_{11} u_{,r} - 2r^3 w_{,rr} C_{11} u_{,r} -$$
$$- r^3 w_{,rr} C_{11} w_{,r}{}^2 - 4r^2 D_{11} w_{,r} w_{,rr} - 2r^2 kC_{12} u - 2r^2 kC_{22} u - 2r^2 w_{,rr} C_{12} u +$$
$$+ 2r^2 w_{,rr} D_{12} w_{,r} - 2r^2 w_{,rr} C_{12} u + 2r^2 D_{12,r} kw + 2r^2 D_{12,r} (w_{,r})^2 + 4r^2 D_{12} kw_{,r} +$$
$$+ 2r^2 E_{12} w_{,rr} w_{,r} + 4r^2 E_{12} w_{,r} w_{,rr} - 2r^2 E_{22,r} kw + 4r^2 E_{11,r} kw - 4r^2 E_{11,r} (w_{,r})^2 +$$
$$+ 4r^2 E_{11} kw_{,r} - 4r^2 E_{11} w_{,rr} w_{,r} + 2r^3 E_{11,rr} kw - 4r^3 E_{11,r} w_{,rr} w_{,r} - 2r^3 E_{11,rr} (w_{,r})^2 +$$
$$+ 4r^3 E_{11,r} kw_{,r} - 4r^3 E_{11,r} w_{,r} w_{,rr} + 4r^3 E_{11} kw_{,rr} - 2r^3 E_{11} w_{,rrr} w_{,r} - 2r^3 (E_{11} w_{,rr})^2 -$$
$$- 2r^3 D_{11} w_{,r} w_{,rrr} + 2r^3 D_{12,rr} kw + 4r^3 D_{12,r} kw_{,r} + 4r^3 D_{12} kw_{,rr} - 2r^3 kC_{11} u_{,r} +$$

$$+2r^3C_{11}k^2w+4r^3C_{12}k^2w=2r^3q;$$
$$r^2(kE_{11}-D_{11})w_{,rrr}-(rD_{11,r}-krE_{11,r}+r(kD_{11}-C_{11})w_{,r}-kE_{11}+D_{11})rw_{,rr}-r^2(kD_{11}-C_{11})u_{,rr}-$$
$$-\delta w_{,r}\,r^2(kD_{11}-C_{11})w_{,rr}+[(kr^2D_{11,r}-r^2)\cdot(kw-(w_{,r})^2-\delta u_{,r})]C_{11,r}+$$
$$+r(-w_{,r}+k(krw-u))D_{12,r}+(-kr^2w+ru)C_{12,r}+w_{,r}E_{12,r}kr+$$
$$+(-r(kD_{11}-kD_{12}-C_{11}+C_{12})w_{,r}+k^2D_{11}r^2+k^2D_{12}r^2-kr^2C_{11}-kr^2C_{12}-kE_{22}+D_{22})w_{,r}-$$
$$-r(kD_{11}-C_{11})u_{,r}+wD_{11}k^2r-wC_{11}kr-(krw-u)(kD_{22}-C_{22})=0. \quad (10)$$

Полученную систему дифференциальных уравнений (10) следует дополнить краевыми условиями: прогиб, поворот нормали к средней поверхности и радиальные смещения равны нулю ($w=0,\ w_{,r}=0,\ u=0$) [12].

Дифференциальные уравнения (10), обладающие тройной нелинейностью, создают сложности в поиске решений. В связи с этим, для получения решения системы уравнений, представленной в данной работе, используется двухшаговый метод последовательных возмущений параметров, предложенный В.В. Петровым. Первый шаг, относящийся к нагружению, предусматривает применение процедуры уточнения, основанной на методе упругих переменных параметров, разработанном И.А. Биргером.

Запишем геометрические зависимости (3) в линеаризованном виде:

$$\delta e_r=\delta\varepsilon_r+z\delta\chi_r;\quad \delta e_\theta=\delta\varepsilon_\theta+z\delta\chi_\theta, \quad (11)$$

где $\delta\varepsilon_r=\delta u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\,\delta w_{,r};\quad \delta\varepsilon_\theta=\frac{\delta u}{r}-k\delta w;\quad \delta\chi_r=-\delta w_{,rr};\quad \delta\chi_\theta=\frac{-\delta w_{,r}}{r}.$

Физические соотношения (4) в линеаризованной форме примут вид:

$$\delta e_r=\frac{\partial e_r}{\partial\sigma_r}\delta\sigma_r+\frac{\partial e_r}{\partial\sigma_\theta}\delta\sigma_\theta;\quad \delta e_\theta=\frac{\partial e_\theta}{\partial\sigma_r}\delta\sigma_r+\frac{\partial e_\theta}{\partial\sigma_\theta}\delta\sigma_\theta; \quad (12)$$

Обращая физические соотношения (12), получим зависимость напряжений от деформаций в следующем виде:

$$\delta\sigma_r=K_{11}(\lambda)\delta e_r+K_{12}(\lambda)\delta e_\theta;\quad \delta\sigma_\theta=K_{21}(\lambda)\delta e_r+K_{22}(\lambda)\delta e_\theta, \quad (13)$$

где $K_{11}(\lambda)=\frac{\Delta_{22}}{\Delta};\ K_{12}(\lambda)=K_{21}(\lambda)=-\frac{\Delta_{21}}{\Delta}=-\frac{\Delta_{12}}{\Delta};\ \Delta=\Delta_{11}\Delta_{22}-\Delta_{12}\Delta_{21};\ K_{22}(\lambda)=\frac{\Delta_{11}}{\Delta};\ \Delta_{11}=\frac{\partial e_r}{\partial\sigma_r};$
$\Delta_{22}=\frac{\partial e_\theta}{\partial\sigma_\theta};\ \Delta_{12}=\Delta_{21}=\frac{\partial e_r}{\partial\sigma_\theta}=\frac{\partial e_\theta}{\partial\sigma_r}.$

В данном контексте дифференцирование по параметру λ в формулах для приращений и деформаций не требуется. Это обусловлено тем, что в рамках предложенной задачи влияние агрессивной водородной среды на сферу уже учтено и завершено. Связь между усилиями и деформациями срединной поверхности в таком случае можно представить в линеаризованной форме следующим образом:

$$\delta N_r=C_{11}(\lambda)\delta\varepsilon_r+C_{12}(\lambda)\delta\varepsilon_\theta+D_{11}(\lambda)\delta\chi_r+D_{12}(\lambda)\delta\chi_\theta$$
$$\delta N_\theta=C_{12}(\lambda)\delta\varepsilon_r+C_{22}(\lambda)\delta\varepsilon_\theta+D_{21}(\lambda)\delta\chi_r+D_{22}(\lambda)\delta\chi_\theta$$
$$\delta M_r=D_{11}(\lambda)\delta\varepsilon_r+D_{12}(\lambda)\delta\varepsilon_\theta+E_{11}(\lambda)\delta\chi_r+E_{12}(\lambda)\delta\chi_\theta$$
$$\delta M_\theta=D_{12}(\lambda)\delta\varepsilon_r+D_{22}(\lambda)\delta\varepsilon_\theta+E_{21}(\lambda)\delta\chi_r+E_{22}(\lambda)\delta\chi_\theta \quad (14)$$

Уравнения равновесия в приращениях запишем в виде:

$$\begin{gathered}\delta M_{r},_{rr}-\delta M_{\theta},_{r}/r+2\delta M_{r},_{r}/r+k(\delta N_{r}+\delta N_{\theta})+\delta N_{r}w,_{rr}+N_{r}\delta w,_{rr}=-\delta q\\ \delta N_{r},_{r}+(\delta N_{r}-\delta N_{\theta})/r-k[\delta M_{r},_{r}+(\delta M_{r}-\delta M_{\theta})/r]=0\end{gathered} \quad (15)$$

Подставив выражения для усилий и моментов из (14) в линеаризованное уравнение состояния оболочки (15), а также включив в рассмотрение приращения деформаций и перемещений (11), приходим к системе двух дифференциальных уравнений, описывающих деформации оболочки в линеаризованной форме:

$$\begin{gathered}2r^{2}E_{12},_{rr}\,\delta w,_{r}+2r^{2}E_{12},_{r}\,\delta w,_{rr}-2r^{2}D_{12},_{rr}\,\delta u-2r^{2}D_{12},_{r}\,\delta u,_{r}+2rD_{22},_{r}\,\delta u+2rD_{22}\delta u,_{r}-2D_{22}\delta u-\\ -2rE_{22},_{r}\,\delta w,_{r}-2rE_{22}\delta w,_{rr}+2E_{22}\delta w,_{r}-4r^{2}D_{11},_{r}\,\delta u,_{r}-4r^{2}D_{11}\delta u,_{rr}+4r^{2}E_{11},_{r}\,\delta w,_{rr}+\\ +4r^{2}E_{11}\delta w,_{rrr}-2r^{3}D_{11},_{rr}\,\delta u,_{r}-4r^{3}D_{11},_{r}\,\delta u,_{rr}-2r^{3}D_{11}\delta u,_{rrr}+2r^{3}D_{11}(\delta w,_{rr})^{2}+2r^{3}E_{11},_{rr}\,\delta w,_{rr}+\\ +4r^{3}E_{11},_{r}\,\delta w,_{rrr}+2r^{3}E_{11}\delta w,_{rrrr}-2r^{3}kC_{11}w,_{r}\,\delta w,_{r}-2r^{3}D_{11}\delta u,_{rrr}+2r^{3}D_{11}(\delta w,_{rr})^{2}+2r^{3}E_{11},_{rr}\,\delta w,_{rr}-\\ -2r^{3}kC_{12}w,_{r}\,\delta w,_{r}+2r^{3}\delta w,_{rr}\,C_{11}k\delta w-2r^{3}\delta w,_{rr}\,C_{11}w,_{r}\,\delta w,_{r}+2r^{3}\delta w,_{rr}\,C_{12}k\delta w+\\ +2r^{3}\delta w,_{rr}\,C_{11}kw+2r^{3}\delta w,_{rr}\,C_{12}kw-2r^{3}kC_{12}\delta u,_{r}+\\ +2r^{3}C_{22}k^{2}\delta w-2r^{3}\delta w,_{rr}\,C_{11}\delta u,_{r}-2r^{3}\delta w,_{rr}\,C_{11}u,_{r}-\\ -r^{3}\delta w,_{rr}\,C_{11}w,_{r}{}^{2}-4r^{2}D_{11}w,_{r}\,\delta w,_{rr}-2r^{2}kC_{12}\delta u-2r^{2}kC_{22}\delta u-2r^{2}\delta w,_{rr}\,C_{12}\delta u+\\ +2r^{2}\delta w,_{rr}\,D_{12}\delta w,_{r}-2r^{2}\delta w,_{rr}\,C_{12}u+2r^{2}D_{12},_{r}\,k\delta w+2r^{2}D_{12},_{r}\,w,_{r}\,\delta w,_{r}+4r^{2}D_{12}k\delta w,_{r}+\\ +2r^{2}D_{12}w,_{rr}\,\delta w,_{r}+4r^{2}D_{12}w,_{r}\,\delta w,_{rr}-2r^{2}D_{22},_{r}\,k\delta w+4r^{2}D_{11},_{r}\,k\delta w-4r^{2}D_{11},_{r}\,w,_{r}\,\delta w,_{r}+\\ +4r^{2}D_{11}k\delta w,_{r}-4r^{2}D_{11}w,_{rr}\,\delta w,_{r}+2r^{3}D_{11},_{rr}\,k\delta w-4r^{3}D_{11},_{r}\,w,_{rr}\,\delta w,_{r}-2r^{3}D_{11,rr}w,_{r}\,\delta w,_{r}+\\ +4r^{3}D_{11},_{r}\,k\delta w,_{r}-4r^{3}D_{11},_{r}\,w,_{r}\,\delta w,_{rr}+4r^{3}D_{11}k\delta w,_{rr}-2r^{3}D_{11}w,_{rrr}\,\delta w,_{r}-2r^{3}D_{11}w,_{rr}\,\delta w,_{rr}-\\ -2r^{3}D_{11}w,_{r}\,\delta w,_{rrr}+2r^{3}D_{12},_{rr}\,k\delta w+4r^{3}D_{12},_{r}\,k\delta w,_{r}+4r^{3}D_{12}k\delta w,_{rr}-2r^{3}kC_{11}\delta u,_{r}+\\ +2r^{3}C_{11}k^{2}\delta w+4r^{3}C_{12}k^{2}\delta w=2r^{3}\delta q\,;\\ r^{2}(kE_{11}-D_{11})\delta w,_{rrr}-(rD_{11},_{r}-krE_{11},_{r}+r(kD_{11}-C_{11})w,_{r}-kE_{11}+D_{11})r\delta w,_{rr}-r^{2}(kD_{11}-C_{11})\delta u,_{rr}-\\ -\delta w,_{r}\,r^{2}(kD_{11}-C_{11})w,_{rr}+kr^{2}(k\delta w-w,_{r}\,\delta w,_{r}-\delta u,_{r})D_{11},_{r}-r^{2}(k\delta w-w,_{r}\,\delta w,_{r}-\delta u,_{r})C_{11},_{r}+\\ +r(-\delta w,_{r}+k(kr\delta w-\delta u))D_{12},_{r}+(-kr^{2}\delta w+r\delta u)C_{12},_{r}+\delta w,_{r}\,E_{12},_{r}\,kr+\\ +(-r(kD_{11}-kD_{12}-C_{11}+C_{12})w,_{r}+k^{2}D_{11}r^{2}+k^{2}D_{12}r^{2}-kr^{2}C_{11}-kr^{2}C_{12}-kE_{22}+D_{22})\delta w,_{r}-\\ -r(kD_{11}-C_{11})\delta u,_{r}+\delta wD_{11}k^{2}r-\delta wC_{11}kr-(kr\delta w-\delta u)(kD_{22}-C_{22})=0\,.\end{gathered} \quad (16)$$

Граничные условия, согласующиеся с уравнениями деформации оболочки, представленными в линеаризованном виде (16), запишем следующим образом: $\delta w=0$, $\delta w,_{r}=0$, $\delta u=0$.

Уравнение диффузии водорода в оболочке, описывающее поведение среды в линейном приближении, можно записать следующим образом:

$$\lambda=2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}t\{[\lambda_{2}\cos(i\cdot\pi)-\lambda_{1}]/i\}\cdot\sin(i\cdot\pi z/h)\cdot(-D\pi^{2}i^{2}/h^{2})[1+(-D\pi^{2}i^{2}/h^{2})]/\pi\,. \quad (17)$$

Граничные и начальные условия в процессе воздействия внешней среды на обратную сторону нагруженной оболочки определяются следующим образом:

$$\lambda(+h/2,t)=0=\lambda_1;\quad \lambda(-h/2,t)=\lambda_\infty=\lambda_2;\quad \lambda(z,0)=0, \tag{18}$$

где λ_∞ – распределение равновесной концентрации по толщине оболочки.

Проведя анализ эмпирических данных, собранных при исследовании материалов, проявляющих чувствительность к различным видам напряжений в условиях наводороживания, представим общие условия пластичности, принимая во внимание кинетические факторы [13]:

$$F(\sigma_{ij},\lambda)=\tau\cdot f(\xi,\lambda)=k_\tau(\lambda), \tag{19}$$

где $f(\xi,\lambda)$ – функция, описывающая учет типа напряженного состояния, зависящая от концентрации водорода, присутствующего в объеме материала, $k_\tau(\lambda)=\sqrt{2/3}\tau_s(\lambda)$, $\tau_s(\lambda)$ – предел текучести при простом сдвиге.

Связь характеристики пластичности $k_\tau(\lambda)$ с концентрацией среды (λ) для титанового сплава ВТ1-0 выразим в виде уравнения:

$$k_\tau(\lambda)=k_0(B_1+B_2e^{-C/B_0}), \tag{20}$$

здесь B_0 = 0,02455; B_1 = 0,88184; B_2 = 0,11791; $k_0=\tau(\lambda=0)=k_{\tau 0}\approx 453{,}06$ Мпа.

Функция $f(\xi,\lambda)$ аппроксимируется кусочно-экспоненциальной зависимостью, представленной в работе [13]. Зависимость функции вида напряженного состояния $f(\xi,\lambda)$ для сплава ВТ1-0 в процессе эксплуатации в среде с различными концентрациями водорода изображена на рис. 2.

Функция пластичности $f(\xi,\lambda)$, учитывающая влияние характера напряженного состояния на титановый сплав ВТ1-0 в агрессивной водородной среде, может быть представлена в виде:

$$f(\xi,\lambda)=b_1(\lambda)+b_2(\lambda)\cdot e^{b_3(\lambda)\xi}, \tag{21}$$

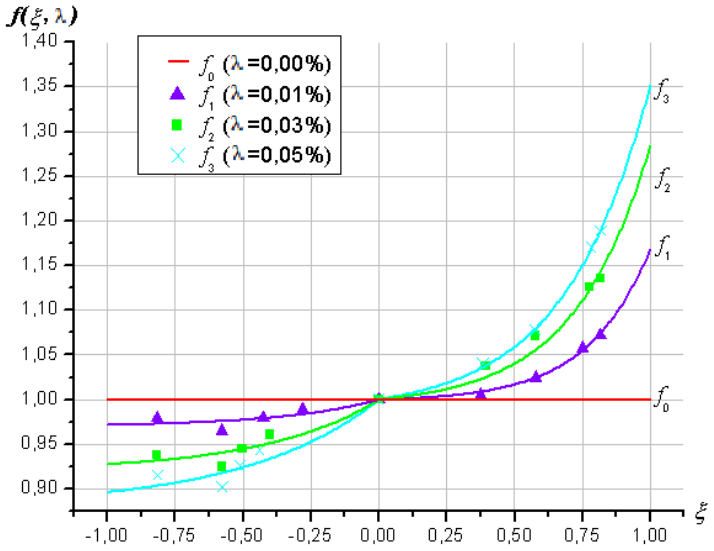


Рисунок 2 – Зависимость функции вида напряженного состояния при разном уровне концентрации водорода λ для сплава ВТ1-0

Результаты и обсуждение

Для расчета оболочки, выполненной из титанового сплава ВТ1-0, используем равномерно распределенную нагрузку, воздействующую с внешней стороны оболочки, направленную перпендикулярно к ее срединной поверхности, интенсивностью до $q_{work} = 5\ МПа$. По результатам анализа сходимости, шаг приращения нагрузки Δq был подобран таким образом, чтобы при переходе от шага Δq к шагу $0{,}5\Delta q$, расхождение в результатах не превышало 0,001. На рисунке 3 представлено графическое отображение распределения равновесной концентрации среды по толщине сферической оболочки при воздействии максимальных нагрузок, достигающих 5 МПа.

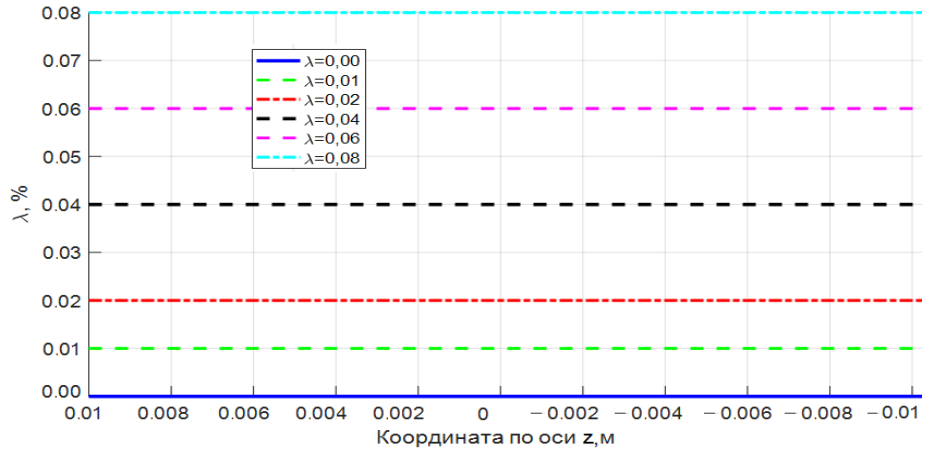


Рисунок 3 – Распределение концентрации среды в равновесном состоянии по толщине оболочки под действием нагрузки интенсивностью $q = 5\ МПа$

Обработаны диаграммы деформаций сферических оболочек, где применялись условия пластичности для выявления взаимосвязи между нагрузкой и прогибом, характерными для начального этапа пластического деформирования. (19). В зависимости от степени насыщения водородом окружающей среды, это условие может быть представлено в виде степенных полиномов (22) – (24):

$$w = a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + a_3 \cdot \lambda^3 \quad (22)$$

где a_0 = 0,01129 м; a_1 = 0,01417 м; a_2 = - 0,23043 м; a_3 = 1,67259 м.

$$q = b_0 + b_1 \cdot \lambda + b_2 \cdot \lambda^2 + b_3 \cdot \lambda^3 + b_4 \cdot \lambda^4 \quad (23)$$

где b_0 = 4,0883 МПа; b_1 = - 76,6738 МПа; b_2 = 2564,53295 МПа;
b_3 = - 36998,71946 МПа; b_4 = 178408,53488.

$$\sigma_\theta = c_0 + c_1 \cdot \lambda + c_2 \cdot \lambda^2 + c_3 \cdot \lambda^3 + c_4 \cdot \lambda^4 \quad (24)$$

где c_0 = - 3,916 Па·10^8; c_1 = - 36,30172 Па·10^8; c_2 = - 754,94897 Па·10^8;
c_3 = 10809,13994 Па·10^8; c_4 = - 53846,87078 Па·10^8.

Таблица 1 – Результаты обработки диаграмм деформирования

λ, %	w, м	Расхождение, %	σ_θ, Па*10^8	Расхождение, %	q, МПа	Расхождение, %
0	5,31·10^{-3}	0	-1,90	0	4,15	0

0,01	$5{,}45\cdot10^{-3}$	2,61/2,68	-1,83	3,74/3,89	3,55	14,66/17,17
0,02	$5{,}51\cdot10^{-3}$	3,68/3,82	-1,80	5,34/5,64	3,41	18,08/22,05
0,04	$5{,}62\cdot10^{-3}$	5,58/5,90	-1,77	6,93/7,45	3,24	22,23/28,56
0,06	$5{,}71\cdot10^{-3}$	6,91/7,42	-1,73	9,06/9,96	3,10	25,64/34,46
0,08	$5{,}83\cdot10^{-3}$	8,99/9,88	-1,70	10,66/11,92	2,83	32,47/48,04

Анализ данных, представленных в таблице 1, позволяет заключить, что достижение предельного состояния, определяемого условными пределами текучести, происходит раньше, чем начальное состояние, пропорционально увеличению водонасыщения. Это обусловлено деградацией механических характеристик материала под влиянием агрессивной среды, содержащей водород. Иначе говоря, вычисляется процентное отклонение текущего состояния структуры от исходного при неизменном содержании водорода в окружающей среде. Полученные результаты показывают, что при завершенном насыщении толщины оболочки до λ=0,08% разница величин прогибов составляет 9,85%, по напряжениям – 11,9%, а различие предельной нагрузки с начальным состоянием λ=0% – 48,01%, что является неприемлемым для использования конструкций с высокой степенью ответственности.

На рис. 4-7 показана зависимость прогибов и напряжений от нагрузки в сферических оболочках при различном содержании водорода, а также фиксация моментов времени, возникающих при наступлении критического состояния.

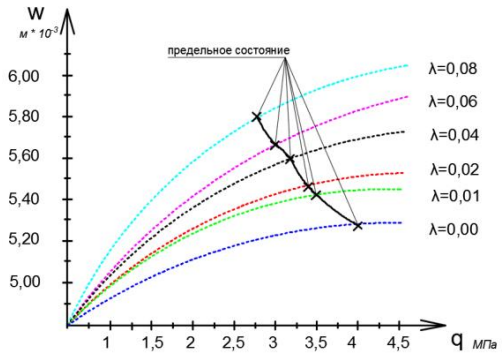


Рисунок 4 – Зависимость прогибов сферической оболочки от нагрузки при различных степенях гидрогенизации с фиксацией предельного состояния (иллюстрация автора)

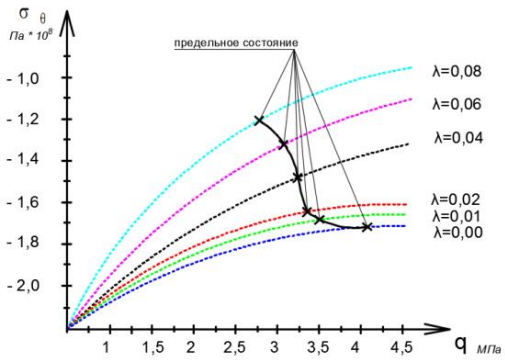


Рисунок 5 – Зависимость окружных напряжений сферической оболочки от нагрузки при различных степенях гидрогенизации с фиксацией предельного состояния (иллюстрация автора)

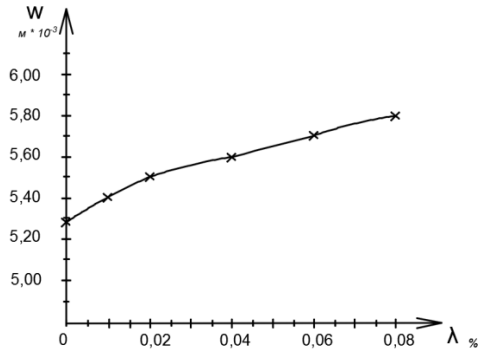


Рисунок 6 – Распределение прогибов сферической оболочки в зависимости от

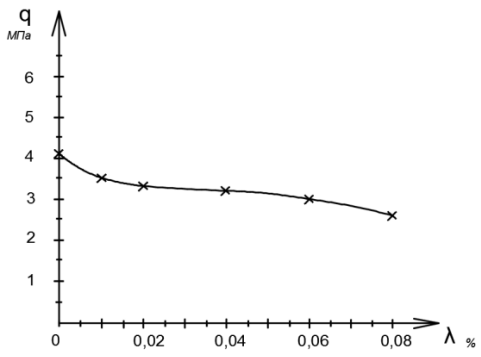


Рисунок 7 – Зависимость численного значения приложенной нагрузки на

степени гидрогенизации с фиксацией предельного состояния (иллюстрация автора)

сферическую оболочку от степени гидрогенизации с фиксацией предельного состояния (иллюстрация автора)

Заключение

По итогам анализа решения задачи, связанной с деформированием тонкостенных пологих сферических оболочек круглой формы, изготовленных из титанового сплава ВТ1-0, возникает необходимость учитывать гибкий механизм. Этот механизм должен принимать во внимание изменение механических характеристик материала в условиях воздействия агрессивных сред, содержащих водород.

С повышением содержания водорода в металле наблюдается снижение условного предела текучести сплава ВТ1-0, а также снижение предела прочности при растяжении во всех его вариациях. Это наглядно иллюстрируют графики, демонстрирующие взаимосвязь деформации и напряжения с приложенной нагрузкой при различных уровнях концентрации водорода, представленных на рис. 4 и 5. Из диаграммы на рис. 7 видно, что при объемном содержании водорода в теле оболочки 0,08% момент предельного состояния конструкции по нагрузке наступает на 48,01% быстрее, чем в начальном состоянии $\lambda = 0\%$. При степени водородонасыщения материала $\lambda = 0{,}08\%$ отличие максимальных прогибов относительно начального состояния составляет 15,29%, а напряжений – 48,5%.

В работе приведена математическая модель, описывающая процесс деформации сферической оболочки под влиянием равномерного давления, оказываемого на внешнюю поверхность, и водородной среды, воздействующей на внутреннюю поверхность. В отличие от существующих теоретических моделей [6,7], представленная модель обеспечивает более высокую точность в определении напряжений благодаря учету особенностей наведенной анизотропии титановых сплавов.

Для упрощения описания системы алгебраических уравнений применена разностная аппроксимация четвертого порядка. Дискретизация задачи деформирования оболочки осуществляется путем аппроксимации области решения уравнений равномерной сеткой метода конечных разностей [8]. Радиус оболочки разделен на 30 частей, толщина – на 50 частей, а число точек определяется условием сходимости. Задача с тройной нелинейностью решается методом конечных разностей с использованием двухшагового параметрического метода упорядоченных возмущений В.В. Петрова [9], обеспечивающего линеаризацию уравнений. Для начального этапа нагружения применяется детальная итерационная процедура, основанная на методе переменных параметров упругости И.А. Биргера [10].

На основе полученного уравнения состояния проведен численный анализ нелинейного деформирования сферической оболочки. Исследованы результаты расчетов оболочки, подверженной воздействию агрессивной водородной среды. Значения прогибов соответствуют порядку величины толщины рассматриваемой оболочки [11].

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. Москва: Наука, 1991. 196 с.

2. Серазутдинов М.Н. Аналитические решения для криволинейных стержней на основе соотношений для прямолинейного стержня // Изв. КГАСУ. 2023. № 2 (64). С. 70-79.

3. Бажутова В.О., Теличко В.Г. Оценка влияния фактора времени взаимодействия с агрессивной средой на деформирование цилиндрической оболочки из титанового сплава // Безопасность строительного фонда России. Проблемы и решения. Материалы Международных академических чтений (Курск, 18 ноября 2024 года). Курск, 2024. С. 19-30.

4. Гервиц Т.Я. Влияние газонасыщения на статическую прочность титановых сплавов // Физико-химическая механика материалов. 1981. № 2. С. 45-48.

5. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Наука, 1966. 636 с.

6. Овчинников И.Г., Петров В.В. Математическое моделирование процесса взаимодействия элементов конструкций с агрессивными средами // Деформирование материалов и элементов конструкций в агрессивных средах. Саратов: Саратовский политехнический ин-т. 1983. С. 3-11.

7. Овчинников И.Г. Модифицированная модель деформирования и разрушения материала, подвергающегося облучению // Строительная механика и расчёт сооружений, 2014. №1. С. 29-35.

8. Кузнецова В.О., Трещев А.А. Влияние изменения концентрации водорода во времени на НДС сферической оболочки из титанового сплава // Эксперт: теория и практика. 2020. №4(7). С. 72-81.

9. Петров В.В., Кривошеин И.В. Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала. М:осква АСВ, 2009. 208 с.

10. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Москва: Оборонгиз, 1956. 151 с.

11. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной наведённого чувствительностью к виду напряжённого состояния. Определяющие соотношения: монография. Москва, Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. 328 с.

12. Матченко Н.М., Толоконников Л.А., Трещев А.А. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 1. Квазилинейные соотношения // Известия РАН. Механика твердого тела. 1995. №1. С. 73-78.

13. Трещев А.А. Деформирование конструкций из титановых сплавов с учетом их наводороживания: монография. Москва, Тула: ТулГУ, 2022. 462 с.

REFERENCES

1. Rabotnov Yu.N. *Izbrannyye trudy. Problemy mekhaniki deformiruyemogo tverdogo tela.* [Selected works. Problems of Mechanics of a Deformable Solid Body]. Moscow: Nauka, 1991. 196 p.

2. Serazutdinov M.N. *Analiticheskiye resheniya dlya krivolineynykh sterzhney na osnove sootnosheniy dlya pryamolineynogo sterzhnya* [Analytical solutions for curved rods based on the relations for a rectilinear rod]. *Izvestiya KGASU*. 2023. No. 2 (64), pp.70-79.

3. Bazhutova V.O. Telichko V.G. *Otsenka faktora vremeni vzaimodeystviya s agressivnoy nagruzkoy na deformirovaniye krugloy obrabotki iz titanovogo splava* [Assessment of the time factor of interaction with an aggressive load on the deformation of round processing made of titanium alloy]. *Bezopasnost' stroitel'nogo fonda Rossii. Problemy i resheniya. Materialy Mezhdunarodnyh akademicheskih chtenij* (Kursk, 18 noyabrya 2024 goda). Kursk, 2024, pp. 19-30.

4. Gervits T.Ya. *Vliyaniye gazonasyshcheniya na staticheskuyu prochnost' titanovykh splavov* [Influence of gas saturation on the static strength of titanium alloys]. *Fiziko-himicheskaya mekhanika materialov*. 1981. No. 2, pp. 45-48.

5. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. M.: *Plastinki i obolochki* [Plates and shells] Moscow: Nauka, 1966. 636 p.

6. Ovchinnikov I.G., Petrov V.V. *Matematicheskoye modelirovaniye protsessa vzaimodeystviya elementov konstruktsiy s agressivnymi sredami* [Mathematical modeling of the process of interaction of structural elements with aggressive environments]. *Deformirovanie materialov i elementov konstrukcij v agressivnyh sredah*. Saratov: Saratovskij politekhnicheskij in-t. 1983, pp. 3-11.

7. Ovchinnikov I.G. *Modifitsirovannaya model' deformirovaniya i razrusheniya materiala, podvergayushchegosya oblucheniyu* [Modified model of deformation and destruction of a material subjected to irradiation]. *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij*. 2014. No.1, pp. 29-35.

8. Kuznetsova V.O., Treshchev A.A. *Vliyaniye izmeneniya kontsentratsii vodoroda vo vremeni na NDS sfericheskoy obolochki iz titanovogo splava* [Influence of changes in hydrogen concentration over time on the stress-strain state of a spherical shell made of titanium alloy]. *Ekspert: teoriya i praktika*. 2020. No.4(7), pp. 72-81.

9. Petrov V.V., Krivoshein I.V. *Metody rascheta konstruktsiy iz nelineyno-deformiruyemogo materiala* [Methods for calculating structures from a non-linearly deformable material]. Moscow: ASV, 2009. 208 p.

10. Birger I.A. *Nekotoryye matematicheskiye metody resheniya inzhenernykh zadach* [Some mathematical methods for solving engineering problems]. Moscow: Oborongiz, 1956. 151 p.

11. Treshchev A.A. *Teoriya deformirovaniya i prochnosti materialov s iznachal'noy navedonnogo chuvstvitel'nost'yu k vidu napryazhonnogo sostoyaniya* [The theory of deformation and strength of materials with initial induced sensitivity to the type of stress state]. *Opredelyayushchie sootnosheniya: monografiya*. Moscow, Tula: RAASN; TulGU, 2016. 328 p.

12. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treshchev A.A. *Opredelyayushchiye sootnosheniya izotropnykh raznosoprotivlyayushchikhsya sred. Ch. 1. Kvazilinejnye sootnosheniya* [Constitutive ratios of isotropic differently resisting media. Part 1. Quasilinear relations]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela.* 1995.No. 1, pp. 73-78.

13. Treshchev A.A. *Deformirovaniye konstruktsiy iz titanovykh splavov s uchetom ikh navodorozhivaniya: monografiya*. [Deformation of structures made of titanium alloys, taking into account their hydrogenation: monograph]. Moscow, Tula: TulGU, 2022. 462 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ	INFORMATION ABOUT THE AUTHOR
Бажутова Виолетта Олеговна – доцент каф. ССМиК, Тульский государственный университет (300012, Россия, г. Тула, пр. Ленина, 92, e-mail: kuznecova_violetta@ mail.ru)	*Bazhutova Violetta Olegovna* – Associate professor of the department of SSMiC, Tula State University (300012, Russia, Tula, Lenin Ave., 92, e-mail: kuznecova_violetta@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 31.05.2025; одобрена после рецензирования 30.06.2025, принята к публикации 11.07.2025.
The article was submitted 31.05.2025; approved after reviewing 30.06.2025; accepted for publication 11.07.2025.