Научная статья
УДК 664.951

РАСЧЕТ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРИ РЕЗАНИИ ОХЛАЖДЕННОЙ РЫБЫ НА ОСНОВЕ ЧЕТЫРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА

Н.В. Самойлова[1], О.В. Агеев[1,*], С.Б. Перетятко[1], К.В. Егорова[1]

[1] Калининградский государственный технический университет, Калининград, Россия
[*] E-mail: oleg.ageev@klgtu.ru

Аннотация. Рассмотрен процесс резания мышечной ткани охлажденной рыбы лезвием с прямой кромкой. Вязкоупругие свойства материала описаны четырехэлементной моделью. Путем решения дифференциального уравнения Бюргерса получено выражение для нормального контактного давления материала на наклонную грань ножа. Разработаны математические модели для определения размерной и безразмерной сил вредных сопротивлений на фаске ножа. Выполнены расчеты размерной силы сопротивления при различных значениях коэффициента истинной динамической вязкости охлажденной рыбы. Установлено, что указанная сила монотонно возрастает с повышением скорости резания и стремится к теоретическому пределу. Выполнено сравнение результатов расчетов, полученных на основе четырехэлементной модели Бюргерса и модели стандартного вязкоупругого тела. Результаты моделирования продемонстрировали увеличение силы сопротивления с возрастанием вязкости рыбы при охлаждении сырья, что соответствует физическому смыслу. Определено, что математические описания, полученные на основе модели Бюргерса, дают более точные результаты по причине более полного учета вязкоупругих свойств охлажденной рыбы. Направлением дальнейших исследований является получение на базе модели Бюргерса математических моделей для расчета сил полезных сопротивлений, возникающих на режущей кромке лезвия при разрыве волокон материала.

Ключевые слова: *рыба; резание; вязкость; сила; сопротивление; нож; грань; реология; вязкоупругость.*

Для цитирования: Самойлова Н.В., Агеев О.В., Перетятко С.Б., Егорова К.В. Расчет сил сопротивлений при резании охлажденной рыбы на основе четырехэлементной реологической модели материала // *Вестник науки и образования Северо-Запада России*. 2025. Т. 11. № 1. С. 6–17.

Original article

CALCULATION OF RESISTANCE FORCES DURING CHILLED FISH CUTTING BASED BY A FOUR-ELEMENT RHEOLOGICAL MODEL OF MATERIAL

N.V. Samojlova[1], O.V. Ageev[1,*], S.B. Peretyatko[1], K.V. Egorova[1]

[1] Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia
[*] E-mail: oleg.ageev@klgtu.ru

Abstract. The process of cutting the muscle tissue of chilled fish with straight edge blade with are considered. The viscoelastic properties of the material by a four-element model are described. By solving the Burgers differential equation, an expression for the normal contact pressure of the material to knife inclined edge are obtained. Mathematical models for determine the dimensional and dimensionless forces of harmful resistance on knife chamfer are developed. Calculations of the dimensional resistance force for different values of true dynamic viscosity

© Самойлова Н.В., Агеев О.В., Перетятко С.Б., Егорова К.В. 2025

coefficient of chilled fish are completed. It is found that this force monotonically increases with increasing cutting speed and tends to the theoretical limit. A comparison of the calculation results obtained on the basis of the four-element Burgers model and the standard viscoelastic model are completed. The modeling results showed that with an increase in the viscosity of the fish during cooling of the raw material, the form resistance force increases, which corresponds to the physical meaning. It is determined that the mathematical descriptions obtained on the basis of the Burgers model give more accurate results due to a more complete consideration of the viscoelastic properties of chilled fish. The direction of further research is to obtain, on the basis of the Burgers model, mathematical models for calculating of useful resistance force that arise by the blade cutting edge during material fibers are torn.

Keywords: *fish; cutting; viscosity; force; resistance; knife; edge; rheology; viscoelasticity.*

For citation: Samojlova N.V., Ageev O.V., Peretyatko S.B., Egorova K.V. Calculation of resistance forces during chilled fish cutting based by a four-element rheological model of material. *Journal of Science and Education of North-West Russia*. 2025. V. 11, No. 1, pp. 6–17.

Введение

При первичной обработке охлажденной рыбы базовым физическим процессом преобразования сырья является резание в различных условиях сжатия, растяжения и изгиба. Существенные достижения и значительный вклад в разработку теории резания пищевых материалов принадлежат отечественным ученым. В этой связи следует особо отметить работы В.А. Арета, В.В. Пеленко, Г.В. Алексеева, а также научные труды Н.Е. Резника, Т.Т. Вольфа, А.К. Пильненко, Д.Л. Львова, К.С. Мустафаева и других известных авторов.

Следует выделить отраслевые работы по переработке рыбного сырья, среди которых ключевыми следует признать исследования В.М. Чупахина, А.В. Терентьева, В.М. Боркунова, В.Н. Дегтярева, В.Т. Пазенко, В.Н. Коржова, А.К. Друсейка, С.И. Бриля, В.П. Чивиленко, Ю.В. Алешина, И.З. Уманцева, Ю.В. Поспелова, П.Д. Смирнова, Ю.А. Фатыхова, М.П. Андреева, О.Я. Мезеновой, Е.И. Верболоз, Д.В. Степанова.

Вопросы теории и практики резания пищевых продуктов активно разрабатываются и за рубежом. Теоретическое и экспериментальное исследование процесса резания рыбы провел А. Довгялло в статье [1], где выделил основные силы сопротивлений, действующие на рабочие органы, а также изучил влияние режимных параметров процесса на качество готовых изделий из пресноводного сырья.

M. Boisly, S. Schuldt с соавторами [2-4] рассматривали механические процессы обработки при изготовлении мясных продуктов из сырья и полуфабрикатов. В результате указанные исследователи предложили эмпирические зависимости, которыми связаны усилия разрушения волокнистых материалов со скоростью движения ножа. Особую ценность полученным результатам придает сопоставление экспериментальных данных с конечно-элементными расчетами.

Крупный механик T. Atkins в работах [5, 6] предпринял подробное экспериментальное и теоретическое изучение резания различных пищевых сред, в результате которых разработал основу для оптимизации геометрии режущих органов. Исследователи A. Spagnoli, M. Terzano с соавторами [7] определили решающие зависимости процесса резания вязкоупругих материалов и подчеркнули роль трения в развитии эффекта разрушения. Одновременно ими выполнен сравнительный анализ сил сопротивлений при различных режимных параметрах, а также рассчитаны деформационные силы трения на фасках режущих инструментов.

В своей статье [8] K.-R. Deibel и другие предложили математические модели для расчета усилий резания различных эластичных материалов. Наряду с этим, силы полезных сопротивлений при обработке растительных пищевых продуктов изучались исследователями B.S. Ogunsina, A.I. Bamgboye в обстоятельной работе [9].

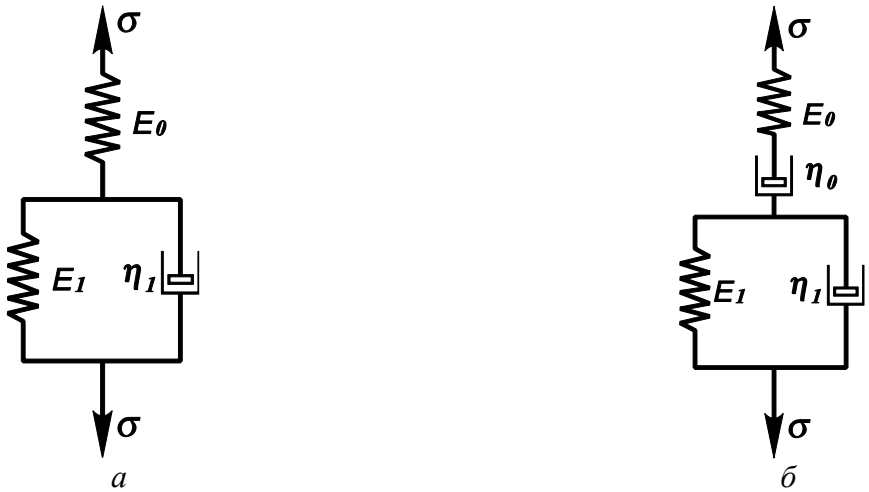
Влияние структурно-реологических свойств растительного сырья на силы сопротивлений при обработке пищевых сред анализировали J. Sadowska, T. Jeliński с соавторами в публикации [10]. Необходимо также упомянуть работу [11] известных авторов S.M. Goh, M.N. Charalambides, J.G. Williams, которые обосновали конструкцию экспериментальной установки и последовательно изложили результаты испытаний по резанию пищевых продуктов тонкими струнами.

Значительный вклад в развитие теории резания материалов животного и растительного происхождения внесла работа [12] зарубежных ученых E. Vandenberghe, M.N. Charalambides с соавторами. Исследователи B.S. Sridhar, K. Sommer [13] рассчитали методом конечных элементов силы сопротивлений, возникающие в процессе измельчения вязкоупругих продуктов с различной консистенцией.

Численные модели резания вязкоупругих материалов предложили B.L. Tai и B. Takabi в статье [14], а также исследователи M. Pagani и U. Perego в публикации [15]. Авторы H.J. Holl, M. Meindlhumer и другие в статье [16] представили научные положения и ценные результаты по вибрационному резанию пищевых сред. В обзорно-аналитической работе [17] W. Xu, J. Wang, Y. Deng и других рассмотрены и обобщены известные публикации зарубежных авторов в области гидравлического резания пищевых продуктов.

Наряду с вышеперечисленными результатами, в рыбной отрасли был предложен комплекс математических описаний процесса резания рыбы: математические модели сил нормальных контактных давлений на грани режущих органов с различной геометрией [18]; модели влияния режимных параметров и геометрии ножа на восстановительную деформацию материала [19]; модели вязкоупругих реактивных сил сопротивления, действующих на лезвия с различной геометрией [20]; модели деформационных сил трения [21]; модели сил вредных сопротивлений, действующих на криволинейные грани лезвия; модели влияния параметров шероховатости граней режущего инструмента на силы трения; модели сил полезных сопротивлений [22]. Следует отметить, что малоизученными остаются адгезионные силы трения при резании пищевого материала.

Однако, принимая во внимание теоретическую и практическую значимость работ [18-22], следует признать, что предложенная в них теория резания рыбы построена с использованием трехэлементной модели вязкоупругого материала Максвелла-Томсона (стандартное вязкоупругое тело) (рис. 1,*а*). В то же время, согласно экспериментальным исследованиям [23], при высоких напряжениях в материале, свойственных процессу его разрушения, механическое поведение мышечной ткани охлажденной рыбы более точно описывается четырехэлементной моделью Бюргерса (рис. 1,*б*).



а *б*

Рисунок 1 – Реологические модели мышечной ткани охлажденной рыбы
а – модель Максвелла-Томсона (стандартное вязкоупругое тело);
б – четырехэлементная модель Бюргерса

Вышеизложенное означает, что, несмотря на ценность известных работ, в настоящее время требуется разработка математических описаний процесса резания рыбы, построенных на основе реологической модели Бюргерса. Целью настоящей статьи является определение сил вредных сопротивлений, действующих на режущий орган при его движении в пищевом материале, вязкоупругие свойства которого характеризуются четырехэлементной моделью.

Материал

Строение мышечной ткани рыбы и ее реологические свойства имеют большое значение для анализа явлений, происходящих в процессе порционирования. Мясо рыбы представляется как коллоидная система, состоящая из трех основных образований: септ, мышечных волокон и перемизия. Септы разделяют соматическую мышечную систему рыбы на поперечные участки (так называемые миомеры). Между септами параллельно поверхности тела тушки расположены мышечные волокна. Септы состоят преимущественно из коллагена и эластина, которые образуют в септе мелкую структурную сетку, заполненную вязким белково-солевым раствором.

Следует отметить, что мясо рыбы по физико-механическим свойствам представляет собой сложную сплошную структуру со своеобразными особенностями и свойствами. С реологической точки зрения данный пищевой материал можно охарактеризовать следующими показателями: упругость, эластичность, пластичность и прочность. Указанные особенности механического поведения сырья зависят от химических свойств рыбы и биохимических процессов, протекающих в тканях. Вместе с тем, мясо рыбы не является однородной системой, поскольку составные части мышечных волокон химически неоднородны, а также отличаются различной структурой и расположением в них протеиновых цепочек.

Результаты экспериментов показывают [23], что деформация рыбы в общем случае является суммой трех следующих составляющих: мгновенной упругой деформации, высокоэластичной (запаздывающей) деформации и деформации вязкого течения (пластической). Как указывалось выше, структурно-механические свойства рыбы наиболее точно могут быть сопоставлены с реологической моделью Бюргерса (рис. 1,*б*). Анализ указанной модели показывает, что она имеет три вышеперечисленных вида деформации.

Дифференциальное уравнение второго порядка реологической модели Бюргерса, позволяющее определить механическое напряжение σ по известной относительной деформации ε, запишем в следующем виде:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2}+\left[E_0\cdot\left(\frac{1}{\eta_0}+\frac{1}{\eta_1}\right)+\frac{E_1}{\eta_1}\right]\cdot\frac{d\sigma}{dt}+\frac{E_0\cdot E_1}{\eta_0\cdot\eta_1}\cdot\sigma=\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}\cdot E_0+\frac{d\varepsilon}{dt}\cdot\frac{E_0\cdot E_1}{\eta_1}. \qquad (1)$$

Математическая модель Бюргерса (1) в отличие от модели стандартного вязкоупругого тела включает четыре следующие реологические константы: η_0 - коэффициент истинной динамической вязкости, Н·с/м^2; η_1 - коэффициент высокоэластичной динамической вязкости, Н·с/м^2; E_0 - условно мгновенный модуль упругости, Н/м^2; E_1 - высокоэластичный (запаздывающий) модуль упругости, Н/м^2.

Математическое моделирование силы сопротивления на основе реологической модели Бюргерса

Рассмотрим прямолинейное движение с постоянной скоростью в материале элементарного ножа, изображенного на рис. 2. Центр подвижной декартовой системы координат находится в вершине лезвия - точке O. Примем, что в любой момент времени нож находится в состоянии равновесия. Материал находится в условиях стесненного сжатия по оси Ox, а резание осуществляется без сжатия материала в направлении движения ножа по оси Oy.

Опираясь на работу [19], на рис. 2 обозначим: $\vec{p}_2$ – нормальное контактное давление горизонтального элементарного волокна dy в произвольной точке A передней наклонной грани ножа (нормальное к направлению движения ножа); $\vec{q}_2$ – встречное сопротивление материала движению точки A, обусловленное деформацией указанного волокна по оси Ox; $\vec{\sigma}_2$ – контактное давление материала на переднюю наклонную грань в точке A; $l_к$ – длина кромки лезвия; L – высота ножа; δ – половинная толщина ножа; α – половинный угол заточки передней кромки ножа; h_m – высота фаски; l – ширина материала в недеформированном состоянии.

Согласно работе [20] сила сопротивления при резании рыбы определяется следующим выражением:

$$F_1 = 2 \cdot l_k \cdot \int_0^{h_m} (tg\alpha \cdot p_2(y))dy . \qquad (2)$$

Таким образом, для расчета силы сопротивления на основе уравнения (2) необходимо определить нормальное контактное давление материала в точках наклонной грани лезвия с использованием реологической модели Бюргерса.

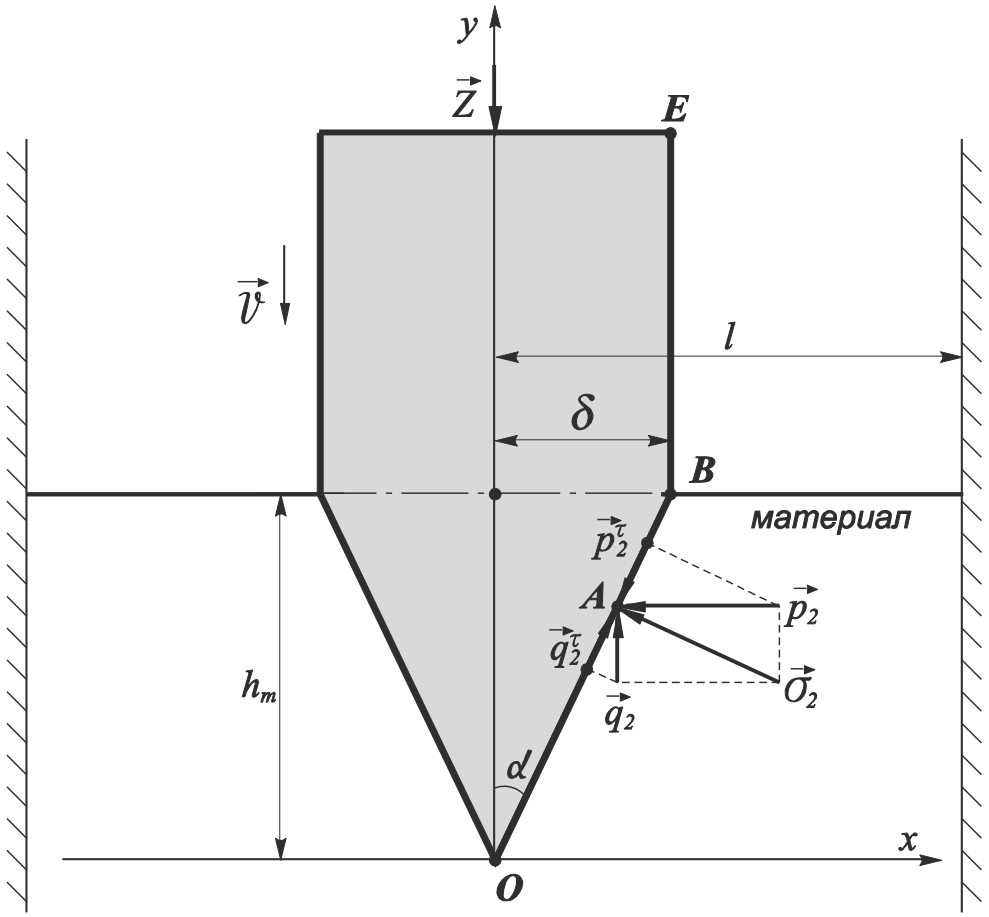


Рисунок 2 – Схема движения элементарного ножа в вязкоупругом материале [19]

Заметим, что увеличение относительной деформации волокна dy происходит с постоянной скоростью $v \cdot tg\alpha$, где v – скорость движения ножа в материале; α – половинный угол заточки ножа. Тогда при раздвижении материала наклонной гранью относительная деформация элементарного волокна зависит от времени t с момента погружения точки O в материал, скорости движения ножа в материале v и половинного угла заточки ножа α следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{v \cdot tg\alpha}{l} \cdot t;\ \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v \cdot tg\alpha}{l};\ \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = 0. \qquad (3)$$

С учетом формул (3) преобразуем дифференциальное уравнение Бюргерса (1) к следующему виду:

$$\frac{d^2 p_2}{dt^2} + \left[E_0 \cdot \left(\frac{1}{\eta_0} + \frac{1}{\eta_1} \right) + \frac{E_1}{\eta_1} \right] \cdot \frac{dp_2}{dt} + \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_0 \cdot \eta_1} \cdot p_2 - \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_1} \cdot \frac{v \cdot tg\alpha}{l} = 0. \qquad (4)$$

Принимая во внимание, что $t = y/v$, в результате решения дифференциального уравнения (4) с начальным условием (при $t = 0$: $p_2 = 0$; $d^2 p_2 / dt^2 = 0$) имеем:

$$p_2 = \frac{\eta_0 \cdot v \cdot tg\alpha}{2 \cdot l \cdot k_3} \cdot \left\{ 2 \cdot k_3 - \sqrt{\exp(k_1 \cdot y)} \cdot \left[-\left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right)^2 + k_3 + 2 \cdot \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right] - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\exp(k_2 \cdot y)} \cdot \left[\left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right)^2 + k_3 - 2 \cdot \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right] \right\}, \qquad (5)$$

где:
$$k_1 = -\frac{1}{v} \cdot \left[\left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right) + \sqrt{\left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right)^2 - 4 \cdot \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_0 \cdot \eta_1}} \right];$$

$$k_2 = -\frac{1}{v} \cdot \left[\left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right) - \sqrt{\left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right)^2 - 4 \cdot \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_0 \cdot \eta_1}} \right];$$

$$k_3 = \frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \cdot \sqrt{\left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right)^2 - 4 \cdot \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_0 \cdot \eta_1}}.$$

Введем следующие обозначения реологических характеристик материала:

$$k_4 = -\left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right)^2 + k_3 + 2 \cdot \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_0 \cdot \eta_1};$$
$$k_5 = \left(\frac{E_0 \cdot (\eta_0 + \eta_1) + E_1 \cdot \eta_0}{\eta_0 \cdot \eta_1} \right)^2 + k_3 - 2 \cdot \frac{E_0 \cdot E_1}{\eta_0 \cdot \eta_1}. \qquad (6)$$

Полученное выражение (5) для нормального контактного давления $p_2(y)$ с учетом обозначений (6) подставим в формулу (2):

$$F_1 = \frac{l_k \cdot \eta_0 \cdot v \cdot tg^2\alpha}{l \cdot k_3} \cdot \int_0^{h_m} \left(2 \cdot k_3 - \sqrt{\exp(k_1 \cdot y)} \cdot k_4 - \sqrt{\exp(k_2 \cdot y)} \cdot k_5 \right) dy. \qquad (7)$$

Проинтегрируем и из (7) получим выражение для силы сопротивления:

$$F_1 = \frac{2 \cdot l_k \cdot \eta_0 \cdot v \cdot tg^2\alpha}{l} \cdot \left\{ h_m - \frac{k_4}{k_1 \cdot k_3} \cdot \left(\sqrt{\exp(k_1 \cdot h_m)} - 1 \right) - \frac{k_5}{k_2 \cdot k_3} \cdot \left(\sqrt{\exp(k_2 \cdot h_m)} - 1 \right) \right\}. \qquad (8)$$

Известно, что четырехэлементная реологическая модель, показанная на рис. 1,*б*, имеет два времени релаксации вследствие наличия двух вязких элементов. Характерные особенности релаксации рассматриваемого материала хорошо заметны, если коэффициенты η_0 и η_1 значительно различаются. Соответственно, введем две безразмерные скорости ножа $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$:

$$\bar{v}_1 = \frac{v}{h_m}\cdot\left[\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)+\sqrt{\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)^2-4\cdot\frac{E_0\cdot E_1}{\eta_0\cdot\eta_1}}\right]^{-1}; \quad (9)$$

$$\bar{v}_2 = \frac{v}{h_m}\cdot\left[\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)-\sqrt{\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)^2-4\cdot\frac{E_0\cdot E_1}{\eta_0\cdot\eta_1}}\right]^{-1}; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} v &= \bar{v}_1\cdot h_m\cdot\left[\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)+\sqrt{\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)^2-4\cdot\frac{E_0\cdot E_1}{\eta_0\cdot\eta_1}}\right]= \\ &= \bar{v}_2\cdot h_m\cdot\left[\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)-\sqrt{\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)^2-4\cdot\frac{E_0\cdot E_1}{\eta_0\cdot\eta_1}}\right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Каждая безразмерная скорость ножа является отношением соответствующего характерного времени релаксации материала ко времени контакта горизонтального элементарного волокна с фаской ножа.

С учетом формул (9)-(10) запишем:

$$k_1 = -\frac{1}{\bar{v}_1\cdot h_m};\ k_2 = -\frac{1}{\bar{v}_2\cdot h_m}. \quad (12)$$

Используя выражения (12), выразим силу сопротивления из формулы (8) через обе безразмерные скорости ножа:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{2\cdot l_k\cdot\eta_0\cdot v\cdot tg^2\alpha}{l}\cdot\left\{h_m+\bar{v}_1\cdot h_m\cdot\frac{k_4}{k_3}\cdot\left(\sqrt{\exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_1}\right)}-1\right)+\bar{v}_2\cdot h_m\cdot\frac{k_5}{k_3}\cdot\left(\sqrt{\exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_2}\right)}-1\right)\right\}= \\ &= \frac{2\cdot l_k\cdot\eta_0\cdot v\cdot tg^2\alpha\cdot h_m}{l}\cdot\left\{1+\bar{v}_1\cdot\frac{k_4}{k_3}\cdot\left(\sqrt{\exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_1}\right)}-1\right)+\bar{v}_2\cdot\frac{k_5}{k_3}\cdot\left(\sqrt{\exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_2}\right)}-1\right)\right\}= \\ &= F_0\cdot\bar{v}_1\cdot\left\{1+\bar{v}_1\cdot\frac{k_4}{k_3}\cdot\left(\sqrt{\exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_1}\right)}-1\right)+\bar{v}_2\cdot\frac{k_5}{k_3}\cdot\left(\sqrt{\exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_2}\right)}-1\right)\right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

где $F_0 = \frac{2\cdot l_k\cdot\eta_0\cdot tg^2\alpha\cdot h_m^2}{l}\cdot\left[\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)+\sqrt{\left(\frac{E_0\cdot(\eta_0+\eta_1)+E_1\cdot\eta_0}{\eta_0\cdot\eta_1}\right)^2-4\cdot\frac{E_0\cdot E_1}{\eta_0\cdot\eta_1}}\right]$.

Тогда с учетом $\bar{F}_1 = F_1/F_0$ выражение для безразмерной силы сопротивления имеет следующий вид:

$$\bar{F}_1 = \bar{v}_1\cdot\left\{1+\bar{v}_1\cdot\frac{k_4}{k_3}\cdot\left(\sqrt{\exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_1}\right)}-1\right)+\bar{v}_2\cdot\frac{k_5}{k_3}\cdot\left(\sqrt{\exp\left(-\frac{1}{\bar{v}_2}\right)}-1\right)\right\}. \quad (14)$$

Разработанная математическая модель (8) позволяет варьировать геометрией лезвия, скоростью ножа, а также реологическими константами материала для исследования зависимостей силы сопротивления от указанных параметров.

Кроме того, выражение (8) позволяет непосредственно сравнить результаты расчетов сил сопротивлений, полученные на основе трехэлементной реологический модели Максвелла-Томсона (см., например, [20]) и модели Бюргерса. Выражение для силы сопротивления, полученное на основе модели Максвелла-Томсона, выглядит следующим образом [20]:

ISSN 2413–9858

$$F_1^* = \frac{2 \cdot l_k \cdot \xi \cdot tg^2\alpha}{l} \cdot \left[\frac{h_m^2}{2} + \frac{\xi \cdot \eta_1 \cdot v}{E_1^2} \cdot \left(h_m + \frac{1 - \exp(k \cdot h_m)}{k} \right) \right], \quad (15)$$

где $\xi = \frac{E_0 \cdot E_1}{E_0 + E_1}$; $k = -\frac{E_0 + E_1}{\eta_1 \cdot v}$.

Результаты моделирования в соответствии с выражениями (8) и (15) приведены на рис. 3 и отражают зависимости силы сопротивления от скорости движения лезвия.

Результаты математического моделирования силы сопротивления

На рис. 3 показаны зависимости силы сопротивления от скорости резания при различных значениях коэффициента истинной динамической вязкости. Кривые 1-4 построены для реологической модели Бюргерса по формуле (8), кривая 5 – для реологической модели Максвелла-Томсона по формуле (15).

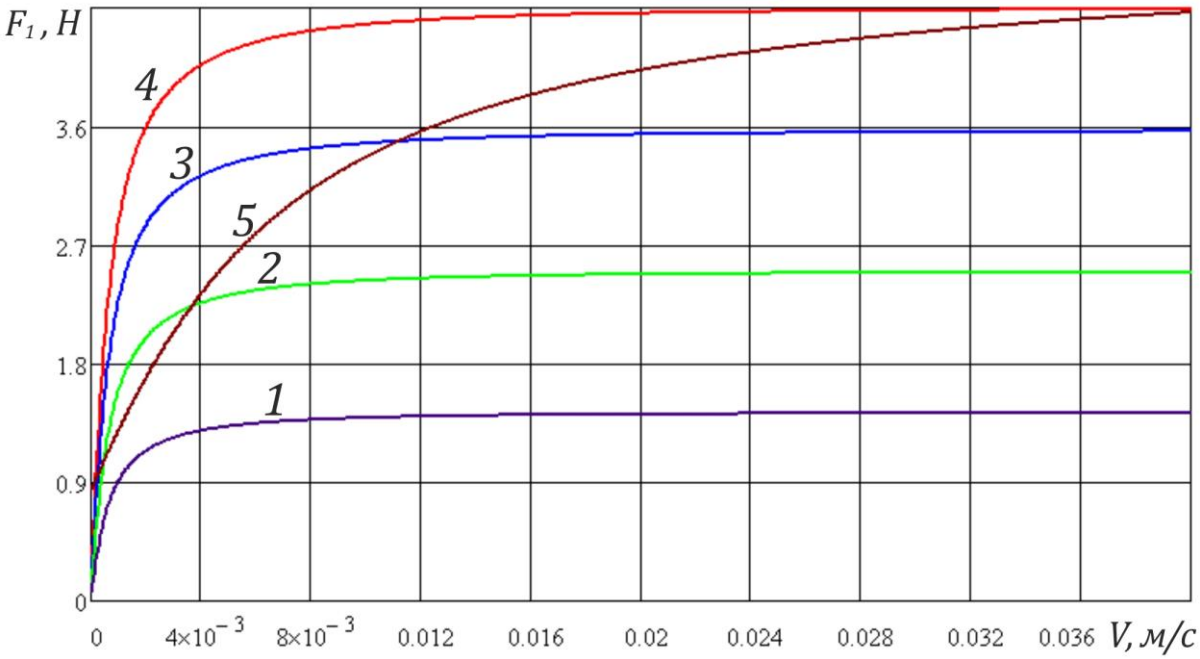


Рисунок 3 – Зависимости силы сопротивления от скорости резания при различных реологических свойствах вязкоупругого материала

($\alpha = 6°$; $\delta = 5$ мм; $l = 50$ мм; $l_k = 50$ мм; $\eta_1 = 1 \cdot 10^6$ Н·с/м^2):

1 – $\eta_0 = 20 \cdot 10^5$ Н·с/м^2; 2 – $\eta_0 = 35 \cdot 10^5$ Н·с/м^2; 3 – $\eta_0 = 50 \cdot 10^5$ Н·с/м^2;

4 – $\eta_0 = 65 \cdot 10^5$ Н·с/м^2; 5 – $\eta_1 = 1 \cdot 10^6$ Н·с/м^2

Обсуждение результатов математического моделирования

Из рис. 3 видим, что с увеличением скорости резания сила сопротивления увеличивается и асимптотически стремится к некоторому теоретическому пределу. При этом величина силы сопротивления, рассчитанная на основе реологической модели Бюргерса, существенно быстрее достигает указанного предела по сравнению с соответствующей величиной, рассчитанной по реологической модели Максвелла-Томсона. Это объясняется наличием в четырехэлементной модели дополнительного вязкого элемента Ньютона, который не соединен параллельно с упругим элементом Гука. Следует отметить, что при корректно определенных реологических константах охлажденной рыбы модель Бюргерса более точно описывает механическое поведение материала при температурах

обрабатываемого сырья выше 3ºС. Заметим, что кривые 4 и 5 на рис. 3 стремятся к общему предельному значению силы.

Наряду с этим, рис. 3 иллюстрирует, что при увеличении коэффициента истинной динамической вязкости в модели Бюргерса сила сопротивления существенно возрастает. Такой физический эффект имеет место при резании охлажденного рыбного сырья, вязкость которого увеличивается с понижением температуры.

Выводы

1. Проведено математическое моделирование сил сопротивления при резании вязкоупругого материала, реологические свойства которого описаны четырехэлементной моделью Бюргерса. Анализ моделей подтверждает, что зависимости силы сопротивления от скорости резания для четырехэлементной и трехэлементной модели материала качественно являются сходными. Однако количественный расчет силы по реологической модели Бюргерса более точно соответствует механическому поведению мышечной ткани охлажденной рыбы при резании, поскольку использует два коэффициента динамической вязкости.

2. Зависимость размерной силы сопротивления от скорости резания является монотонной и имеет теоретический предел, который определяется реологическими константами материала, геометрией лезвия и условиями деформирования сырья.

3. Полученные математические модели для определения сил могут учитывать охлаждение рыбного сырья путем изменения коэффициентов истинной и высокоэластичной динамической вязкости. При снижении температуры сырья указанные коэффициенты повышаются, что обусловливает возрастание силы сопротивления резанию.

4. Направлением дальнейших исследований является получение на базе реологической модели Бюргерса математических описаний для вычисления сил полезных сопротивлений, возникающих при разрушении мышечных волокон охлажденного рыбного сырья. При высоких механических напряжениях, характерных для режимов разрыва и вырыва волокон, расчет данных сил на основе четырехэлементной модели материала является более точным в связи с более полным учетом реологии сырья.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Dowgiallo A. Cutting force of fibrous materials. *Journal of Food Engineering*. 2005. No. 66, pp. 57-61.

2. Boisly M, Schuldt S, Kaestner M.G, Schneider Y, Rohm H. Experimental characterisation and numerical modelling of cutting processes in viscoelastic solids. *Journal of Food Engineering*. 2016. No. 191, pp. 1-9.

3. Schuldt S, Arnold G, Kowalewski J, Schneider Y, Rohm H. Analysis of the sharpness of blades for food cutting. *Journal of Food Engineering*. 2016. No. 188, pp. 13-20.

4. Schuldt S, Schneider Y, Rohm H. High-speed cutting of foods: Cutting behavior and initial cutting forces. *Journal of Food Engineering*. 2018. No. 230, pp. 55-62.

5. Atkins T. Optimum blade configurations for the cutting of soft solids. *Engineering Fracture Mechanics*. 2006. No. 73, pp. 2523-2531.

6. Atkins T. Prediction of sticking and sliding lengths on the rake faces of tools using cutting forces. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. No. 91, pp. 33-45.

7. Spagnoli A., Brighenti R., Terzano M., Artoni F. Cutting resistance of soft materials: Effects of blade inclination and friction. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019. No. 101, pp. 200-206.

8. Deibel K.-R., Lämmlein S., Wegener K. Model of slice-push cutting forces of stacked thin material. *Journal of Materials Processing Technology*. 2014. No. 214, pp. 667-672.

9. Ogunsina B.S., Bamgboye A.I. Fracture Resistance of Cashew Nuts as Influenced by Pre-

Shelling Treatment. *International Journal of Food Properties*. 2013. Vol. 16:7, pp. 1452-1459.

10. Sadowska J., Jeliński T., Błaszczak W., Konopka S., Fornal J., Rybiński W. The Effect of Seed Size and Microstructure on Their Mechanical Properties and Frictional Behavior. *International Journal of Food Properties*. 2013. Vol. 16:4, pp. 814-825.

11. Goh S.M., Charalambides M.N., Williams J.G. On the mechanics of wire cutting of cheese. *Engineering Fracture Mechanics*. 2005. No. 72, pp. 931-946.

12. Vandenberghe E., Charalambides M.N., Mohammed I.K., Ketelaere B.D., Baerdemaeker J.D., Claes J. Determination of a critical stress and distance criterion for crack propagation in cutting models of cheese. *Journal of Food Engineering*. 2017. No. 208, pp. 1-10.

13. Sridhar B.S., Sommer K. Finite Element Simulation of Fracture Mechanism of Fibrous Food. *International Journal of Food Properties*. 2013. Vol. 16:2, pp. 444-460.

14. Takabi B., Tai B.L. A review of cutting mechanics and modeling techniques for biological materials. *Medical Engineering & Physics*. 2017. No. 45, pp. 1-14.

15. Pagani M, Perego U. Explicit dynamics simulation of blade cutting of thin elastoplastic shells using «directional» cohesive elements in solid-shell finite element models. *Computer methods in applied Mechanics and Engineering*. 2015. No. 285, pp. 515-541.

16. Holl H.J., Meindlhumer M., Simader V., Schnurer D., Brandl A. Experimental investigation of friction reduction by superimposed vibrations. *Materials Today: Proceedings*. 2018. No. 5, pp. 26615–26621.

17. Xu W., Wang J., Deng Y., Li J., Yan T., Zhao S., Yang X., Xu E.,Wang W., Liu D. Advanced cutting techniques for solid food: Mechanisms, applications, modeling approaches, and future perspectives. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*. 2022. Vol. 21, pp. 1568-1597.

18. Агеев, О.В. Математическое моделирование сил нормального контактного давления на боковые грани ножа при резании пищевых материалов / О.В. Агеев, В.А. Наумов, Ю.А. Фатыхов // Научный журнал Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2017. № 4. С. 27-42.

19. Агеев, О.В. Математическое моделирование сил нормального контактного давления на грани двухкромочного ножа при резании рыбы / О.В. Агеев, В.А. Наумов, Ю.А. Фатыхов, Н.В. Самойлова // Известия Калининградского государственного технического университета. 2018. № 50. С. 81-102.

20. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov J.A. Mathematical modeling of the resistance force of the profile of a flat-back knife. *Journal of Friction and Wear*. 2019. Vol. 40, No. 6, pp. 580-587.

21. Агеев, О.В. Подход к расчету деформационной силы трения при резании охлажденной рыбы / О.В. Агеев, В.А. Наумов, Ю.А. Фатыхов, Н.В. Самойлова // Вестник Международной академии холода. 2019. № 4. С. 49-56.

22. Агеев, О.В. Математическое моделирование сил полезного сопротивления при резании охлажденных пищевых продуктов / О.В. Агеев, В.А. Наумов, Ю.А. Фатыхов // Вестник Международной академии холода. 2020. № 3. С. 70-82.

23. Агеев, О.В. Анализ соответствия реологических моделей структурно-механическим свойствам рыбы / О.В. Агеев, В.А. Наумов, Ю.А. Фатыхов, Н.В. Самойлова // Научный журнал Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств. 2018. № 2(36). С. 34-43.

REFERENCES

1. Dowgiallo A. Cutting force of fibrous materials. *Journal of Food Engineering*. 2005. No. 66, pp. 57-61.

2. Boisly M, Schuldt S, Kaestner M.G, Schneider Y, Rohm H. Experimental characterisation and numerical modelling of cutting processes in viscoelastic solids. *Journal of Food Engineering*. 2016. No. 191, pp. 1-9.

3. Schuldt S, Arnold G, Kowalewski J, Schneider Y, Rohm H. Analysis of the sharpness of blades for food cutting. *Journal of Food Engineering*. 2016. No. 188, pp. 13-20.

4. Schuldt S, Schneider Y, Rohm H. High-speed cutting of foods: Cutting behavior and initial cutting forces. *Journal of Food Engineering*. 2018. No. 230, pp. 55-62.

5. Atkins T. Optimum blade configurations for the cutting of soft solids. *Engineering Fracture Mechanics*. 2006. No. 73, pp. 2523-2531.

6. Atkins T. Prediction of sticking and sliding lengths on the rake faces of tools using cutting forces. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. No. 91, pp. 33-45.

7. Spagnoli A., Brighenti R., Terzano M., Artoni F. Cutting resistance of soft materials: Effects of blade inclination and friction. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2019. No. 101, pp. 200-206.

8. Deibel K.-R., Lämmlein S., Wegener K. Model of slice-push cutting forces of stacked thin material. *Journal of Materials Processing Technology*. 2014. No. 214, pp. 667-672.

9. Ogunsina B.S., Bamgboye A.I. Fracture Resistance of Cashew Nuts as Influenced by Pre-Shelling Treatment. *International Journal of Food Properties*. 2013. Vol. 16:7, pp. 1452-1459.

10. Sadowska J., Jeliński T., Błaszczak W., Konopka S., Fornal J., Rybiński W. The Effect of Seed Size and Microstructure on Their Mechanical Properties and Frictional Behavior. *International Journal of Food Properties*. 2013. Vol. 16:4, pp. 814-825.

11. Goh S.M., Charalambides M.N., Williams J.G. On the mechanics of wire cutting of cheese. *Engineering Fracture Mechanics*. 2005. No. 72, pp. 931-946.

12. Vandenberghe E., Charalambides M.N., Mohammed I.K., Ketelaere B.D., Baerdemaeker J.D., Claes J. Determination of a critical stress and distance criterion for crack propagation in cutting models of cheese. *Journal of Food Engineering*. 2017. No. 208, pp. 1-10.

13. Sridhar B.S., Sommer K. Finite Element Simulation of Fracture Mechanism of Fibrous Food. *International Journal of Food Properties*. 2013. Vol. 16:2, pp. 444-460.

14. Takabi B., Tai B.L. A review of cutting mechanics and modeling techniques for biological materials. *Medical Engineering & Physics*. 2017. No. 45, pp. 1-14.

15. Pagani M, Perego U. Explicit dynamics simulation of blade cutting of thin elastoplastic shells using «directional» cohesive elements in solid-shell finite element models. *Computer methods in applied Mechanics and Engineering*. 2015. No. 285, pp. 515-541.

16. Holl H.J., Meindlhumer M., Simader V., Schnurer D., Brandl A. Experimental investigation of friction reduction by superimposed vibrations. *Materials Today: Proceedings*. 2018. No. 5, pp. 26615–26621.

17. Xu W., Wang J., Deng Y., Li J., Yan T., Zhao S., Yang X., Xu E.,Wang W., Liu D. Advanced cutting techniques for solid food: Mechanisms, applications, modeling approaches, and future perspectives. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*. 2022. Vol. 21, pp. 1568-1597.

18. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A. *Matematicheskoe modelirovanie sil normal'nogo kontaktnogo davlenija na bokovye grani nozha pri rezanii pishhevyh materialov* [Mathematical simulation of forces of normal contact pressure on side knife edges during cutting of food materials]. *Nauchnyj zhurnal Sankt-Peterburgskogo nacional'nogo issledovatel'skogo universiteta informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki. Serija: Processy i apparaty pishhevyh proizvodstv*. 2017. No. 4(34), pp. 27-42.

19. Ageev O.V., Fatykhov Yu.A., Samojlova N.V. *Matematicheskoe modelirovanie sil normal'nogo kontaktnogo davleniya na grani dvuhkromochnogo nozha pri rezanii ryby* [Mathematical simulation of forces of normal contact pressure on the facets of double-edge knife during fish cutting] *Izvestija Kaliningradskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*. 2018. No. 50, pp. 81-102.

20. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov J.A. Mathematical modeling of the resistance force of the profile of a flat-back knife. *Journal of Friction and Wear*. 2019. Vol. 40, No. 6, pp. 580-587.

21. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A., Samoilova N.V. *Podhod k raschetu deformatsionnoj sily treniya pri rezanii ohlazhdennoj ryby* [Approach to computation of deformation friction force during chilled fish cutting]. *Journal International Academy of Refrigeration.* 2019. No. 4, pp. 49-56.

22. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A. *Matematicheskoe modelirovanie sil poleznogo soprotivleniya pri rezanii okhlazhdennykh pishchevykh produktov* [Mathematical simulation of effective resistance forces during cutting of chilled food products]. *Journal of International Academy of Refrigeration*. 2020. No. 3, pp. 70-82.

23. Ageev O.V., Naumov V.A., Fatykhov Yu.A., Samojlova N.V. *Analiz sootvetstviya reologicheskih modelej strukturno-mekhanicheskim svojstvam ryby* [Correspondence of rheological models to the structural-mechanical properties of fish]. *Nauchnyj zhurnal Sankt-Peterburgskogo nacional'nogo issledovatel'skogo universiteta informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki. Serija: Processy i apparaty pishhevyh proizvodstv.* 2018. No. 2(36), pp. 34-43.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ	INFORMATION ABOUT THE AUTHORS
Самойлова Наталья Владимировна – кандидат технических наук, Калининградский государственный технический университет (236022, Россия, г. Калининград, Советский пр-т, 1, e-mail: procyon@mail.ru)	*Samojlova Natalia Vladimirovna* – Ph.D. (Eng.), Kaliningrad State Technical University (236022, Russia, Kaliningrad, Sovetsky ave. 1, e-mail: procyon@mail.ru)
Агеев Олег Вячеславович – доктор технических наук, профессор, Калининградский государственный технический университет (236022, Россия, г. Калининград, Советский пр-т, 1, e-mail: oleg.ageev@klgtu.ru)	*Ageev Oleg Viatcheslavovich* – Dr.Sci. (Eng.), Professor, Kaliningrad State Technical University (236022, Russia, Kaliningrad, Sovetsky ave. 1, e-mail: oleg.ageev@klgtu.ru)
Перетятко Сергей Борисович – кандидат технических наук, доцент, Калининградский государственный технический университет (236022, Россия, г. Калининград, Советский пр-т, 1, e-mail: sergej.peretyatko@klgtu.ru)	*Peretyatko Sergey Borisovich* – Ph.D. (Eng.), Associate Professor, Kaliningrad State Technical University (236022, Russia, Kaliningrad, Sovetsky ave. 1, e-mail: sergej.peretyatko@klgtu.ru)
Егорова Ксения Викторовна – кандидат химических наук, доцент, Калининградский государственный технический университет (236022, Россия, г. Калининград, Советский пр-т, 1, e-mail: kseniya.egorova@klgtu.ru)	*Egorova Kseniya Viktorovna* – Ph.D. (Chem.), Associate Professor, Kaliningrad State Technical University (236022, Russia, Kaliningrad, Sovetsky ave. 1, e-mail: kseniya.egorova@klgtu.ru)

Статья поступила в редакцию 20.01.2025; одобрена после рецензирования 01.02.2025, принята к публикации 06.02.2025.
The article was submitted 20.01.2025; approved after reviewing 01.02.2025; accepted for publication 06.02.2025.