



Научная статья
УДК 539.3:620.193:669

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВОДОРОДОСОДЕРЖАЩЕЙ СРЕДЫ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ И ПРЕДЕЛЬНОЕ СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ТИТАНОВОГО СПЛАВА

А.А. Трещев¹, В.О. Кузнецова^{1,*}

¹Тулский государственный университет, Тула, Россия,

* E-mail: kuznecova_violetta@mail.ru

Аннотация. В данном исследовании рассматривается математическая модель напряженно-деформированного и предельного состояний круговой цилиндрической оболочки, выполненной из титанового сплава ТС5, подвергающейся воздействию агрессивной водородосодержащей среды. Оболочка находится под действием внутреннего равномерно распределенного давления. Расчёты производятся с использованием модели, обладающей тройной нелинейностью, в рамках подхода, связанного с нормированными пространствами напряжений. Полученный алгоритм решения задачи об исследовании влияния агрессивной среды на оболочки из титановых сплавов эффективно учитывает существенно нелинейное изменение параметров напряженно-деформированного состояния в зависимости от фактора времени. В исследовании сформулирована система нелинейных разрешающих уравнений для расчета оболочки, получены результаты для ключевых параметров воздействия водородной среды на НДС цилиндрической оболочки с учетом охрупчивания. Получены результаты численных экспериментов по расчету круговых цилиндрических оболочек с учетом наведенной разнсопротивляемости под действием агрессивной эксплуатационной среды, больших прогибов, и влияния напряженного состояния на механические свойства материала.

Ключевые слова: титановый сплав; разнсопротивляемость; нелинейный материал; водород; охрупчивание; большие прогибы.

Для цитирования: Трещев А.А., Кузнецова В.О. Исследование влияния водородосодержащей среды на напряженно-деформированное и предельное состояния цилиндрической оболочки из титанового сплава // Вестник науки и образования Северо-Запада России. 2023. Т. 9. № 2. С. 89–104.

Original article

STUDY OF THE INFLUENCE OF A HYDROGEN-CONTAINING MEDIUM ON THE STRESS-STRAIN AND LIMIT STATE OF A CYLINDRICAL SHELL MADE OF A TITANIUM ALLOY

A.A. Treschev¹, V.O. Kuznetsova^{1,*}

¹ Tula State University, Tula, Russia

* E-mail: kuznecova_violetta@mail.ru

Abstract. This study considers a mathematical model of the stress-strain and limit state of a circular cylindrical shell made of titanium alloy TS5 exposed to an aggressive hydrogen-containing

environment. The shell is under the influence of an internal uniformly distributed pressure. The calculations are made using a model with a triple non-linearity, within the framework of the approach associated with normalized stress spaces. The obtained algorithm for solving the problem of studying the effect of an aggressive medium on shells made of titanium alloys effectively takes into account the significantly nonlinear change in the parameters of the stress-strain state depending on the time factor. The study formulated a system of non-linear resolving equations for calculating the shell, obtained results for the key parameters of the effect of the hydrogen environment on the stress-strain state of a cylindrical shell, taking into account embrittlement. The results of numerical experiments on the calculation of circular cylindrical shells are obtained taking into account the induced resistance difference under the action of an aggressive operating environment, large deflections, and the effect of the stress state on the mechanical properties of the material.

Key words: *titanium alloy; differential resistance; non-linear material; hydrogen; embrittlement; large deflections.*

For citation: Treschev A.A., Kuznetsova V.O. Study of the influence of a hydrogen-containing medium on the stress-strain and limit state of a cylindrical shell made of a titanium alloy. *Journal of Science and Education of North-West Russia*. 2023. V.9. No 2. pp. 89–104.

Введение

Сплавы титана, изначально не проявляющие чувствительности к виду напряженного состояния, в процессе насыщения водородом приобретают наведенную зависимость деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния с неоднородностью по направлениям градиентного воздействия среды. Эффект наведенной и изменяющейся во времени разнесопротивляемости необходимо учитывать при расчете элементов конструкций из титановых сплавов, работающих в условиях агрессивной водородосодержащей среды.

В работах [1 – 3] Овчинниковым И.Г. рекомендовано представлять модель конструкции, взаимодействующей с агрессивной средой, в виде совокупности следующих элементов: модели конструктивного элемента, модели материала, модели воздействия среды и предельного состояния. Используя подобный подход, в данной работе исследуется напряженно-деформированное состояние круговой цилиндрической оболочки, выполненной из титанового сплава ВТ1-0, с учетом водородного охрупчивания.

В ряде исследований было предложено применять теорию структурных параметров Работнова Ю.Н. [4, 5], учитывая физико-химические эффекты на поверхности и в объеме деформируемого материала. Применительно к рассматриваемой задаче, эта теория обладает рядом недостатков, в частности, не учитывается тройная нелинейность и эффект наведенной разнесопротивляемости. Поэтому в здесь было предложено использовать уточненную нелинейную математическую модель для решения задачи о воздействии агрессивной водородосодержащей среды на процессы деформирования цилиндрической оболочки, нагруженной изнутри равномерно распределённым давлением, а также средой, действующей на внутреннюю поверхность оболочки.

Теоретическая часть

Рассмотрим равновесие тонкостенной цилиндрической оболочки кругового сечения из α -сплава титана ТС5, нагруженной внутренним давлением (рис. 1). Оболочка жестко закреплена по торцам цилиндра, и имеет следующие геометрические параметры: длина вдоль образующей $L=4$ м, радиус $R=0,6$ м (расстояние до срединной поверхности оболочки от центра кривизны) k – кривизна оболочки, толщина оболочки принята равной $h=0,02$ м. Внешнее давление принималось в интервале $q=0...28$ МПа. Для определения положения произвольной точки на срединной поверхности используем систему Гауссовых координат α_1, α_2 и α_3 , для удобства далее обозначаем $\alpha_1 = X_1$, $\alpha_2 = \theta$, $\alpha_3 = z$. Для описания

перемещений произвольной точки тела цилиндрической оболочки введем триаду u, ϑ, w , где u – перемещения вдоль оси образующей оболочки, ϑ – окружные (круговые) перемещения, w – радиальные перемещения, соответствующие понятию прогиба для рассматриваемой оболочки.

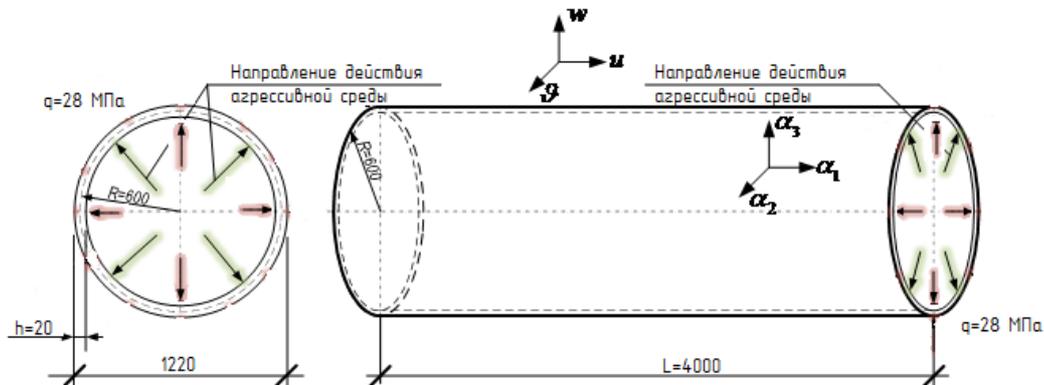


Рисунок 1 – Расчетная схема цилиндрической оболочки

В данной задаче параметры Ляме и главные кривизны имеют вид:

$$A = 1; \quad B = R; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = k = R^{-1}, \quad (1)$$

где R – радиус срединной поверхности оболочки.

Для оценки поведения цилиндрической оболочки при больших прогибах, в соответствии с гипотезами Кирхгофа-Лява и формализмом Кармана, геометрические соотношения для срединной поверхности представляются в виде [6]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{,1} + 0,5(w_{,11})^2; \quad \varepsilon_\theta = (k\vartheta - w_{,0})_{,0} + kw + 0,5(k\vartheta - w_{,0})^2; \\ \gamma_{10} &= w_{,1} + u_{,0} + w_{,1}(k\vartheta - w_{,0}), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_\theta$ – относительные деформации вдоль соответствующих осей, γ_{10} – сдвиговые деформации, в срединной поверхности.

Зависимости составляющих изгибных деформаций (изменения кривизны и кручение) срединной поверхности в зависимости от перемещений определяются традиционным образом [6]:

$$\chi_1 = -w_{,11}; \quad \chi_\theta = -w_{,00}; \quad \chi_{10} = -w_{,10} = -w_{,01}, \quad (3)$$

где χ_1, χ_θ – кривизны, χ_{10} – кручение (крутка).

Компоненты тензора деформаций для точек оболочки, отстоящих от срединной поверхности на расстоянии z , определяются через величины деформаций $\varepsilon_1, \varepsilon_\theta, \gamma_{10}$, кривизны χ_1, χ_θ и кручения χ_{10} , следующим образом:

$$e_1 = \varepsilon_1 + z\chi_1; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + z\chi_\theta; \quad \gamma_{10} = \gamma + 2z\chi_{10}. \quad (4)$$

Ввиду осевой симметрии рассматриваемой тестовой задачи по силовым и деформационным параметрам, геометрические соотношения (1) – (4) заметно упрощаются [6]:

$$\varepsilon_1 = u_{,1} + 0,5(w_{,11})^2; \quad \varepsilon_\theta = kw; \quad \chi_1 = -w_{,11}; \quad e_1 = \varepsilon_1 + z\chi_1; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta. \quad (5)$$

В пространстве, связанном с октаэдрической площадкой, напряженное состояние определяется модулем вектора полного напряжения на этой площадке S_0 , углом ψ , который образует вектор S_0 с нормалью к этой площадке, и углом φ - фазой напряжений [7]:

$$S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (6)$$

где $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$ – среднее напряжение или нормальное октаэдрическое; $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij}/3}$ – касательное октаэдрическое напряжение; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ – девиатор напряжений; δ_{ij} – символ Кронекера. Для удобства при описании состояний деформируемых сред рекомендуется перейти от углов ψ и φ к их тригонометрическим представлениям: $\xi = \cos \psi = \sigma/S_0$; $\eta = \sin \psi = \tau/S_0$; $\cos 3\varphi = \sqrt{2} \det(S_{ij})/\tau^3$; $i, j = 1, 2, 3$.

В связи с тем, что за нормы пространства принят модуль вектора S_0 , величины ξ и η приобретают смысл нормированных напряжений, которые связаны условием нормировки: $\xi^2 + \eta^2 = 1$.

Рассмотрим потенциал деформаций W , в который включены параметры жесткости напряженного состояния ξ , η и фазовый инвариант $\cos 3\varphi$. Механические свойства материала определяются 10-ю постоянными материала. В соответствии с предложенной теорией в случае нелинейных материалов потенциал деформаций W выстраивается аналогично уравнениям деформационной теории пластичности и, в результате, описывается суммой квазилинейной и нелинейной частей:

$$W = (A_e(\lambda) + B_e(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_e(\lambda) + D_e(\lambda)\xi + E_e(\lambda)\eta \cos 3\varphi)\tau^2 + \\ + [(A_p(\lambda) + B_p(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_p(\lambda) + D_p(\lambda)\xi + E_p(\lambda)\eta \cos 3\varphi)\tau^2]^n, \quad (7)$$

где $A_e(\lambda)$, $B_e(\lambda)$, ..., $A_p(\lambda)$, $B_p(\lambda)$, ... – это материальные функции квазилинейной и нелинейной частей кинетического потенциала, зависящие от концентрации водорода, n – показатель степени нелинейности материала с учетом изменения механических характеристик материала под воздействием агрессивной среды, λ – объемная концентрация водорода в теле конструкционного материала.

Материальные функции определяются из опытов по одноосным растяжению и сжатию следующим образом [7]:

$$A_e(\lambda) = 3[A_1(\lambda) + C_1(\lambda)]; \quad C_e(\lambda) = 3[A_1(\lambda) - C_1(\lambda)/2]; \quad (8) \\ B_e(\lambda) = \sqrt{3}[B_1(\lambda) + 2D_1(\lambda)]; \quad D_e(\lambda) = \sqrt{27}B_1(\lambda); \\ E_e(\lambda) = \sqrt{1,5}[B_1(\lambda) - D_1(\lambda)]; \quad A_p(\lambda) = 3[A_2(\lambda) + C_2(\lambda)] \\ C_p(\lambda) = 3[A_2(\lambda) - C_2(\lambda)/2]; \quad B_p(\lambda) = 3[B_2(\lambda) + 2D_2(\lambda)]; \\ D_p(\lambda) = \sqrt{27}B_2(\lambda); \quad E_p(\lambda) = \sqrt{1,5}[B_2(\lambda) - D_2(\lambda)].$$

Зависимости между компонентами тензоров напряжений и деформаций могут быть установлены из кинетического потенциала деформаций W (7) по правилам Кастильяно:

$$e_{kk} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{kk}}; \quad 2\varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \tau_{ij}}; \quad (i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j) \quad (9)$$

Учитывая принятые модельные гипотезы оболочки, получим зависимость деформаций от напряжений в форме:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_\theta \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}; \quad [A] = \begin{bmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Обращая матричные уравнения (10), получим зависимости напряжений от деформаций:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_\theta \end{Bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} B_{11}(\lambda) & B_{12}(\lambda) \\ B_{21}(\lambda) & B_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

где $[B] = [A]^{-1}$; A_{11}, A_{12}, \dots – компоненты симметричной матрицы податливостей $[A]$, являющиеся функциями, содержащимися в потенциале деформации W (7), они зависят от вида напряженного состояния и степени наводороживания титанового сплава. Эти компоненты определяются согласно [7] следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{11}(\lambda) &= \{2[R_1(\lambda) + 2R_3(\lambda)]/3 + R_2(\lambda)\xi[3 - 2\xi^2]/3 + R_4(\lambda)[\xi(2 - \eta^2)/3 + \\ &+ 4(\sigma_{11} - 2\sigma_{22})/9S_0] + R_5(\lambda)[\eta \cos 3\varphi(1 + \xi^2) + 2\sqrt{2}\xi - 2\cos 3\varphi - \sqrt{2}\sigma_{22}/S_0]\}/3 \\ A_{12}(\lambda) &= \{2[R_1(\lambda) - R_3(\lambda)]/3 + [R_2(\lambda) + R_4(\lambda)/3]\xi + R_5(\lambda)[\cos 3\varphi(1 - \eta) - \sqrt{2}\xi]\}/3; \\ A_{22}(\lambda) &= \{2(R_1(\lambda) + 2R_3(\lambda))/3 + R_2(\lambda)\xi[3 - 2\xi^2]/3 + R_4(\lambda)[\xi(2 - \eta^2) + \\ &+ 4(\sigma_{22} - 2\sigma_{11})/9S_0] + R_5(\lambda)[\eta \cos 3\varphi(1 + \xi^2) + 2\sqrt{2}\xi - 2\cos 3\varphi - \sqrt{2}\sigma_{22}/S_0]\}/3; \\ R_k(\lambda) &= L_{ek}(\lambda) + n[(A_p(\lambda) + B_p(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_p(\lambda) + D_p(\lambda)\xi)]^{n-1}L_{pk}(\lambda); \\ L_{m1}(\lambda) &= A_m(\lambda); \quad L_{m2}(\lambda) = B_m(\lambda); \quad L_{m3}(\lambda) = C_m(\lambda); \quad L_{m4}(\lambda) = D_m(\lambda); \\ L_{m5}(\lambda) &= E_m(\lambda); \quad m = e, p; \quad k = 1, 2, 3; \quad A_{12}(\lambda) = A_{21}(\lambda) \end{aligned} \quad (12)$$

Уравнения механики статико-геометрической природы не зависят от постулируемых уравнений состояния, определяющих физическую природу материалов. Поэтому сохраняется справедливость всех основных положений и зависимости геометрически нелинейной теории оболочек, когда усилия и моменты для пологих оболочек, приведенные к срединной поверхности, остаются связанными уравнениями равновесия и имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} N_{1,1} + S_{,\theta} + q_1 &= 0; \quad N_{\theta,\theta} + S_{,1} + k(Q_\theta + H_{,1}) + q_2 = 0; \\ M_{1,1} + H_{,\theta} - Q_1 - N_{1,w_{,1}} - S(k\vartheta - w_{,\theta}) &= 0; \\ M_{\theta,\theta} + H_{,1} - Q_\theta - N_\theta(k\vartheta - w_{,\theta}) - Sw_{,1} &= 0; \quad Q_{1,1} + Q_{\theta,\theta} + kN_\theta + q_3 = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где N_k, S – усилия в срединной поверхности оболочки; Q_k – поперечные силы; M_k, H – изгибающие и крутящий моменты; q_m – интенсивности внешней нагрузки по соответствующим направлениям.

Усилия и моменты определяются через напряжения традиционным способом, путем интегрирования соответствующих напряжений по толщине цилиндрической оболочки, записанные в виде:



$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 dz; \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz; \quad M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_1 z dz; \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz. \tag{14}$$

Осевая симметрия задачи позволяет упростить статические уравнения:

$$N_{1,1} = 0; \quad M_{1,1} - Q_1 - N_1 w_{,1} = 0; \quad Q_{1,1} - kN_\theta + q = 0. \tag{15}$$

Используя выражения (14) и вычисляя только значимые силовые факторы через компоненты деформаций, получаем:

$$\begin{aligned} N_1 &= K_{11}(\lambda)\varepsilon_1 + K_{12}(\lambda)\varepsilon_\theta + P_{11}(\lambda)\chi_1; \\ N_\theta &= K_{12}(\lambda)\varepsilon_1 + K_{22}(\lambda)\varepsilon_\theta + P_{21}(\lambda)\chi_1; \\ M_1 &= P_{11}(\lambda)\varepsilon_1 + P_{12}(\lambda)\varepsilon_\theta + D_{11}(\lambda)\chi_1, \end{aligned} \tag{16}$$

где материальные функции с учетом влияния степени наводороживания вычисляются через ее концентрацию λ следующим образом:

$$K_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) dz; \quad P_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) z dz; \quad D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) z^2 dz. \tag{17}$$

Параметры B_{ij} зависят от концентрации водорода λ и вида реализуемого напряженного состояния [7].

Внося интегральные характеристики напряженного состояния (16) в уравнения равновесия (15), с учетом материальных функций (17), приходим к системе двух разрешающих дифференциальных уравнений изгиба оболочки в перемещениях:

$$\begin{aligned} &K_{11}(\lambda)_{,1} (u_{,1} + 0,5(w_{,11})^2) + K_{11}(\lambda)(u_{,11} + w_{,11}) + K_{12}(\lambda)_{,1} kw + K_{12}(\lambda)kw_{,1} - \\ &- P_{11}(\lambda)_{,1} w_{,11} - P_{11}(\lambda)w_{,111} = 0, \\ &P_{11}(\lambda)_{,11} (u_{,1} + 0,5(w_{,11})^2) + P_{11}(\lambda)_{,1} (u_{,11} + w_{,11}) + P_{11}(\lambda)_{,1} (u_{,11} + w_{,11}) + \\ &+ P_{11}(\lambda)(u_{,111} + w_{,111}) + P_{12}(\lambda)_{,11} kw + P_{12}(\lambda)_{,1} kw_{,1} + P_{12}(\lambda)_{,1} kw_{,1} + \\ &+ P_{12}(\lambda)kw_{,11} - D_{11}(\lambda)_{,11} w_{,11} - 2D_{11}(\lambda)_{,1} w_{,111} - D_{11}(\lambda)w_{,1111} - \\ &- k[K_{12}(\lambda)(u_{,1} + 0,5(w_{,11})^2) + K_{22}(\lambda)kw - P_{21}(\lambda)w_{,11}] + q = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Для обеспечения полноты системы разрешающих уравнений (18) дополним её граничными условиями в соответствии с формулировкой модельной задачи, а конкретно, условиями защемления цилиндра по торцам (с учетом осевой симметрии задачи): на торцах цилиндра с координатами $L=0$ м и $L=4$ м: $w = 0, w_{,1} = 0, u = 0$.

Дифференциальные уравнения (18), описывающие деформирование тонкой круговой цилиндрической оболочки, имеют сильно выраженную нелинейность, что заметно осложняет их решение. Поэтому решение представленной системы уравнений проводим двухшаговым методом последовательных возмущений параметров В.В. Петрова [8]. Кроме того, требуется привлечение уточняющей итерационной процедуры метода переменных параметров упругости И.А. Биргера [9], включаемой на первом шаге нагружения.

Следуя методике последовательных нагружений, геометрические соотношения (5) для цилиндрических оболочек в приращениях запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_1 &= \delta u_{,1} + w_{,1} \delta w_{,1}; \quad \delta\varepsilon_\theta = k\delta w; \quad \delta\chi_1 = -\delta w_{,11}; \\ \delta e_1 &= \delta u_{,1} + w_{,1} \delta w_{,1} - z\delta w_{,11}; \quad \delta e_\theta = k\delta w. \end{aligned} \tag{19}$$



Физические зависимости (10) в линеаризованной форме представим следующим образом:

$$\delta e_1 = \frac{\partial e_1}{\partial \sigma_1} \delta \sigma_1 + \frac{\partial e_1}{\partial \sigma_\theta} \delta \sigma_\theta; \quad \delta e_\theta = \frac{\partial e_\theta}{\partial \sigma_1} \delta \sigma_1 + \frac{\partial e_\theta}{\partial \sigma_\theta} \delta \sigma_\theta; \tag{20}$$

Обращая соотношения (20) приходим к следующим зависимостям напряжений от деформаций в приращениях:

$$\delta \sigma_1 = B_{11}(\lambda) \delta e_1 + B_{12}(\lambda) \delta e_\theta; \quad \delta \sigma_\theta = B_{21}(\lambda) \delta e_1 + B_{22}(\lambda) \delta e_\theta, \tag{21}$$

$$\text{где } B_{11}(\lambda) = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}; \quad B_{12}(\lambda) = B_{21}(\lambda) = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta}; \quad \Delta = \Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}\Delta_{21}; \quad B_{22}(\lambda) = \frac{\Delta_{11}}{\Delta};$$

$$\Delta_{11} = \frac{\partial e_1}{\partial \sigma_1}; \quad \Delta_{22} = \frac{\partial e_\theta}{\partial \sigma_\theta}; \quad \Delta_{12} = \Delta_{21} = \frac{\partial e_1}{\partial \sigma_\theta} = \frac{\partial e_\theta}{\partial \sigma_1}.$$

При этом уравнения связи усилий с деформациями срединной поверхности (16) в приращениях преобразуются к виду:

$$\delta N_1 = K_{11}(\lambda) \delta \varepsilon_1 + K_{12}(\lambda) \delta \varepsilon_\theta + P_{11}(\lambda) \delta \chi_1; \tag{22}$$

$$\delta N_\theta = K_{12}(\lambda) \delta \varepsilon_1 + K_{22}(\lambda) \delta \varepsilon_\theta + P_{21}(\lambda) \delta \chi_1;$$

$$\delta M_1 = P_{11}(\lambda) \delta \varepsilon_1 + P_{12}(\lambda) \delta \varepsilon_\theta + D_{11}(\lambda) \delta \chi_1.$$

Уравнения равновесия (10) в линеаризованной форме [8] преобразовываются к виду:

$$\delta N_{1,1} = 0; \quad \delta M_{1,1} - \delta Q_1 + w_{,1} \delta N_1 + N_1 \delta w_{,1} = 0; \tag{23}$$

$$\delta Q_{1,1} - k \delta N_\theta + \delta q = 0.$$

В следствие осесимметричности поставленной задачи отсутствует горизонтальная сила при не нагруженных ею торцов оболочки, следовательно $N_1 = 0$. Отсюда получаем $\delta Q_1 = \delta M_{1,1}$ и два уравнения равновесия. Применяя процедуры (14) и (17) и внося результаты в уравнения равновесия (23), приходим к системе двух дифференциальных разрешающих уравнений в линеаризованной форме, удобной для применения метода конечных разностей:

$$\begin{aligned} & K_{11}(\lambda)_{,1} (\delta u_{,1} + w_{,1} \delta w_{,1}) + K_{11}(\lambda) (\delta u_{,11} + w_{,11} \delta w_{,1} + w_{,1} \delta w_{,11}) + K_{12}(\lambda)_{,1} k \delta w + \tag{24} \\ & + K_{12}(\lambda) k \delta w_{,1} - P_{11}(\lambda)_{,1} \delta w_{,11} - P_{11}(\lambda) \delta w_{,111} = 0, \\ & P_{11}(\lambda)_{,11} (\delta u_{,1} + w_{,1} \delta w_{,1}) + 2P_{11}(\lambda)_{,1} (\delta u_{,11} + w_{,11} \delta w_{,1} + w_{,1} \delta w_{,11}) + \\ & + P_{11}(\lambda) (\delta u_{,111} + w_{,111} \delta w_{,1} + 2w_{,11} \delta w_{,11} + w_{,1} \delta w_{,111}) + P_{12}(\lambda)_{,11} k \delta w + 2P_{12}(\lambda)_{,1} k \delta w_{,1} + \\ & + P_{12} k \delta w_{,11} - D_{11}(\lambda)_{,11} \delta w_{,11} - 2D_{11}(\lambda)_{,1} \delta w_{,111} - D_{11}(\lambda) \delta w_{,1111} - \\ & - k_2 (K_{12}(\lambda) (\delta u_{,1} + w_{,1} \delta w_{,1}) + K_{22}(\lambda) k \delta w - P_{12}(\lambda) \delta w_{,11}) + \delta q = 0. \end{aligned}$$

Для обеспечения полноты системы разрешающих уравнений (24) дополним её граничными условиями в соответствии с формулировкой модельной задачи, а конкретно, условиями защемления цилиндра по торцам (с учетом осевой симметрии задачи): на торцах цилиндра с координатами $L=0$ м и $L=4$ м: $\delta w = 0, \delta w_{,1} = 0, \delta u = 0$.

Уравнение диффузии в линеаризованной форме запишется следующим образом:



$$\delta\lambda = 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \delta t \{ [\delta\lambda_2 \cos(i \cdot \pi) - \delta\lambda_1] / i \} \cdot \sin(i \cdot \pi z / h) \cdot (-D\pi^2 i^2 / h^2) [1 + (-D\pi^2 i^2 / h^2)] / \pi \quad (25)$$

где $F_0 = Dt/h^2$ – число Фурье; i – число членов ряда; λ_1 и λ_2 – концентрация среды на поверхностях оболочки; h – толщина оболочки; z – координата точки по толщине оболочки.

Краевые условия при воздействии среды со стороны действия поперечной силовой нагрузки представлены следующим образом:

$$\delta\lambda(-h/2, t) = \delta\lambda_{\infty} = \delta\lambda_1; \quad \delta\lambda(+h/2, t) = 0 = \delta\lambda_2 \quad (26)$$

здесь λ_{∞} – равновесная концентрация водородосодержащей среды.

Начальные условия имеют вид:

$$\delta\lambda(z, 0) = 0 \quad (27)$$

Анализ эмпирических данных для материалов, проявляющих наведенную чувствительность к виду напряженного состояния в процессе наводороживания, позволяет представить условие пластичности в общем виде с учетом кинетики наводороживания следующим образом [7]:

$$F(\sigma_{ij}, \lambda) = \tau \cdot f(\xi, \lambda) = k_{\tau}(\lambda) \quad (28)$$

$f(\xi, \lambda)$ – функция, учитывающая вид напряженного состояния и зависящая от концентрации агрессивной среды в материале, $k_{\tau}(\lambda) = \sqrt{2/3\tau_s(\lambda)}$, $\tau_s(\lambda)$ – предел текучести при простом сдвиге.

Зависимость пластической характеристики $k_{\tau}(\lambda)$ от концентрации (λ) для сплава ТС5 представим в виде следующей зависимости:

$$k_{\tau}(\lambda) = k_0(B_1 + B_2 e^{-C/B_0}) \quad (29)$$

где $B_0 = 0,05632$; $B_1 = 0,77016$; $B_2 = 0,23153$; $k_0 = \tau(\lambda = 0) = k_{\tau_0} \approx 432,63$ Мпа.

С учетом влияния вида напряженного состояния в процессе наводороживания конструкций из титанового сплава, получим следующее выражение функции пластичности:

$$f(\xi, \lambda) = a_1(\lambda) + a_2(\lambda) \cdot e^{a_3(\lambda)\xi} \quad (30)$$

где $a_1(\lambda) = \frac{A_{10} + A_{11} \cdot \text{sign}\xi}{\lambda + (A_{14} + A_{15} \cdot \text{sign}\xi)} + A_{18} + A_{19} \cdot \text{sign}\xi$; $A_{10} = 0,188245$;
 $A_{12} + A_{13} \cdot \text{sign}\xi + e^{A_{16} + A_{17} \cdot \text{sign}\xi}$

$A_{11} = -0,035555$; $A_{12} = 1$; $A_{13} = 0$; $A_{14} = -0,0346205$; $A_{15} = -0,0234495$;

$A_{16} = 0,01372735$; $A_{17} = 0,00462765$; $A_{18} = 0,840205$; $A_{19} = 0,013305$;

$a_2(\lambda) = \frac{A_{20} + A_{21} \cdot \text{sign}\xi}{\lambda + (A_{24} + A_{25} \cdot \text{sign}\xi)} + A_{28} + A_{29} \cdot \text{sign}\xi$; $A_{20} = -0,106284$;
 $A_{22} + A_{23} \cdot \text{sign}\xi + e^{A_{26} + A_{27} \cdot \text{sign}\xi}$

$A_{21} = 0,117504$; $A_{22} = 0,5$; $A_{23} = -0,5$; $A_{24} = -0,0055855$; $A_{25} = 0,0055855$;

$A_{26} = -0,0096306$; $A_{27} = -0,0187303$; $A_{28} = 0,080935$; $A_{29} = -0,092155$;

$a_3(\lambda) = A_{30} + A_{31} \cdot \text{sign}\xi - (A_{32} + A_{33} \cdot \text{sign}\xi) \cdot \lambda$; $A_{30} = 2,120775$; $A_{31} = 1,497475$;

$A_{32} = 3,79925$; $A_{33} = 30,04925$.

Для обеспечения более компактной формы системы алгебраических уравнений воспользуемся разностной аппроксимацией четвертого порядка. Одномерность задачи позволяет представить образующую цилиндра в виде прямой, разбитой на m узловых точек: образующую оболочки разобьем на 30 участков, толщину – на 20. Интегрирование по толщине выполнялось численно по правилам Симпсона. Для решения задачи с тройной нелинейностью применен метод конечных разностей, на базе которого реализованы: двухшаговый метод последовательных возмущений параметров В.В. Петрова [9], позволяющий линеаризовать разрешающие уравнения, и уточняющая итерационная процедура по методу переменных параметров упругости И.А. Биргера [10], которая включается на первом шаге нагружения.

На основе полученных ранее уравнений состояния произведен численный анализ нелинейного деформирования круговой цилиндрической оболочки. Проведен анализ результатов расчета оболочки в условиях воздействия агрессивной водородосодержащей среды.

Рисунок 2 иллюстрирует распределение равновесной концентрации среды в цилиндре по толщине при величине максимальной нагрузки на оболочку до 28 МПа. Рисунки 3 и 4 отражают распределение прогибов и горизонтальных перемещений срединной поверхности оболочки с увеличением нагрузки при разных уровнях водородонасыщения от $\lambda = 0,01\%$ до $\lambda = 0,08\%$.

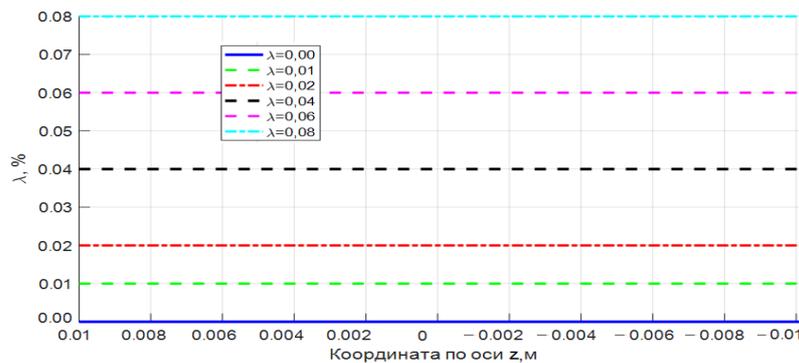


Рисунок 2 – Распределение равновесной концентрации среды в цилиндре по толщине под воздействием нагрузки интенсивностью $q = 28$ МПа

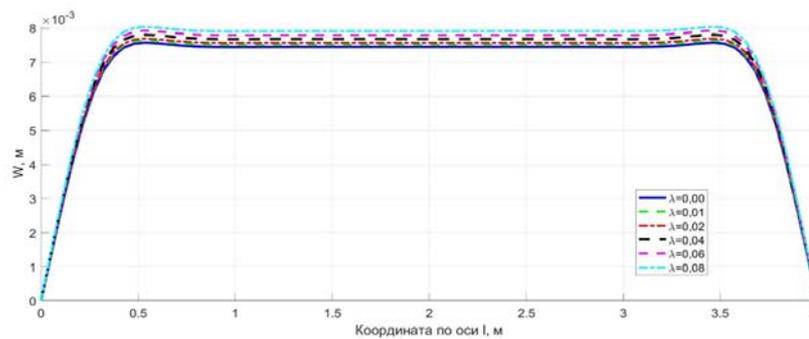


Рисунок 3 – Прогибы вдоль образующей цилиндра под воздействием нагрузки интенсивностью $q = 28$ МПа

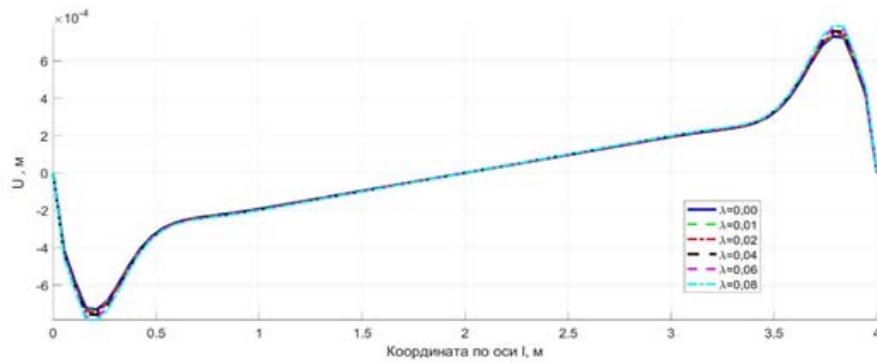


Рисунок 4 – Горизонтальные перемещения вдоль образующей цилиндра под воздействием нагрузки интенсивностью $q = 28$ МПа

Рисунки 5 и 6 подтверждают тот факт, что с увеличением концентрации водорода в сплаве при фиксированной величине нагрузки окружные и радиальные напряжения возрастают.

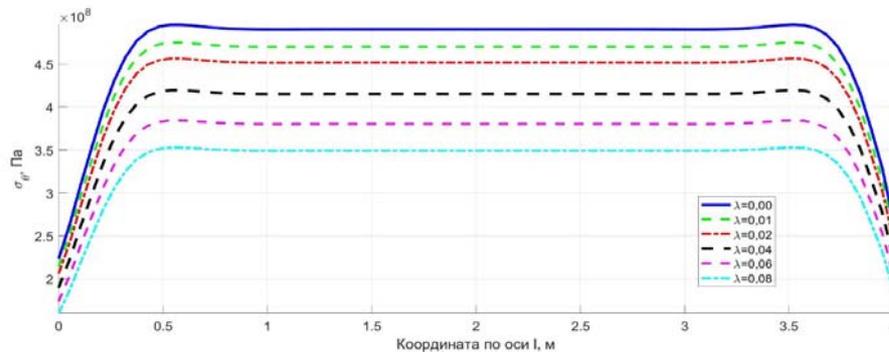


Рисунок 5 – Напряжения σ_θ вдоль образующей цилиндра по нижней поверхности под воздействием нагрузки интенсивностью $q = 28$ МПа

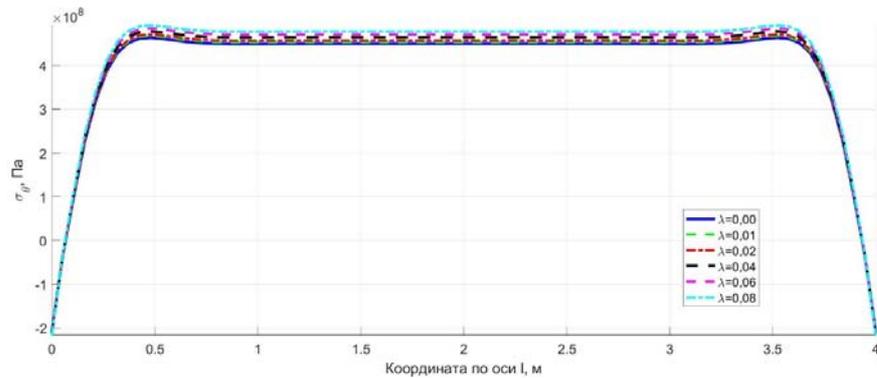


Рисунок 6 – Напряжения σ_θ вдоль образующей цилиндра по верхней поверхности под воздействием нагрузки интенсивностью $q = 28$ МПа

В таблице 1 приведены данные сравнения результатов расчета цилиндрической оболочки из сплава титана ТС5 по рассматриваемой модели с результатами, полученными на базе соотношений И.Г. Овчинникова и Л.А. Кирилловой [1].

Таблица 1 – Анализ результатов расчета оболочки

Концентрация водорода λ , %	Растягивающее напряжение σ_{θ}^{\max} , МПа		Прогиб в центре плана оболочки w_0 , мм	
	Рассматриваемая модель	И.Г. Овчинников, Л.А. Кириллова	Рассматриваемая модель	И.Г. Овчинников, Л.А. Кириллова
0,00	350,07	350,07	7,18	7,18
0,08	515,17	386,89	8,75	7,57

Отличия результатов расчета оболочки, находящейся в существенно насыщенном состоянии (при $\lambda = 0,08\%$) для величины напряжений составляет 33,8%, а для величин максимальных прогибов – 16,6%, объясняется это тем, что принятые потенциальные соотношения [7] изначально обладают более гибким механизмом учета влияния вида напряженного состояния на механические характеристики материалов в самом широком спектре их изменения, согласно сравнительному анализу с соотношениями И.Г. Овчинникова и Л.А. Кирилловой [1], а также с использованием наиболее точного численного метода МКР для того, чтобы возможно было произвести деформационный расчет заданной конструкции.

В результате обработки диаграмм деформирования круговой цилиндрической оболочки, выполненной из сплава титана TC5 с применением условия пластичности (28) получены зависимости величины прогибов, нагрузки и напряжений от степени концентрации среды при снижении условных пределов текучести, записанные в виде степенных полиномов:

$$w = a_0 + a_1 \cdot \lambda + a_2 \cdot \lambda^2 + a_3 \cdot \lambda^3 \quad (31)$$

$$q = b_0 + b_1 \cdot \lambda + b_2 \cdot \lambda^2 + b_3 \cdot \lambda^3$$

$$\sigma_{\theta} = c_0 + c_1 \cdot \lambda + c_2 \cdot \lambda^2 + c_3 \cdot \lambda^3 + c_4 \cdot \lambda^4$$

где $a_0 = 0,0218$ м; $a_1 = 0,00484$ м; $a_2 = 0,11778$ м; $a_3 = -1,3356$ м;

$b_0 = 25,15371$ МПа; $b_1 = -294,25725$ МПа; $b_2 = 5781,52393$ МПа;

$b_3 = -44550,17793$ МПа; $c_0 = -3,51132$ Па·10⁸; $c_1 = 55,17977$ Па·10⁸;

$c_2 = -1813,45787$ Па·10⁸; $c_3 = 30423,006$ Па·10⁸; $c_4 = -159679,505$ Па·10⁸.

Проведя количественный анализ результатов, приведенных в таблице 2, можно сделать вывод о том, что предельное состояние по условным пределам текучести с повышением концентрации водорода в теле материала наступает существенно раньше, относительно начального состояния $\lambda = 0\%$ как по напряжениям, так и по прогибам. Это объясняется снижением механических характеристик материала под воздействием агрессивной водородосодержащей среды с течением времени. Расхождение в процентах рассчитано для двух случаев: по отношению к текущему состоянию конструкции при определенном процентном содержании водорода в материале и относительно начального состояния. Из результатов видно, что в момент полного насыщения толщины оболочки до $\lambda = 0,08\%$ по отношению к исходному состоянию $\lambda = 0\%$ различие величин прогибов составляет 6,85 %, напряжений – 62,46 %, а предельной нагрузки – 58,86 %, что недопустимо при эксплуатации конструкций высокой ответственности.

Таблица 2 – Анализ результатов обработки диаграмм деформирования

λ , %	w, м	Расхождение, %	σ_θ , Па*10 ⁸	Расхождение, %	q, МПа	Расхождение, %
0	$7,15 \cdot 10^{-3}$	0	-5,67	0	25,1	0
0,01	$7,21 \cdot 10^{-3}$	0,83/0,84	-5,21	8,11/8,83	22,9	8,76/9,61
0,02	$7,31 \cdot 10^{-3}$	2,19/2,24	-4,71	16,93/20,38	21,1	15,94/18,96
0,04	$7,43 \cdot 10^{-3}$	3,77/3,92	-4,28	24,51/32,48	19,8	21,12/26,77
0,06	$7,55 \cdot 10^{-3}$	5,30/5,59	-3,67	35,27/16,62	18,7	25,50/34,22
0,08	$7,64 \cdot 10^{-3}$	6,41/6,85	-3,49	38,45/62,46	15,8	49,73/58,86

Зависимость прогибов и напряжений цилиндрической оболочки от нагрузки при разной степени наводороживания с фиксацией предельного состояния изображена на рисунках 7-11.

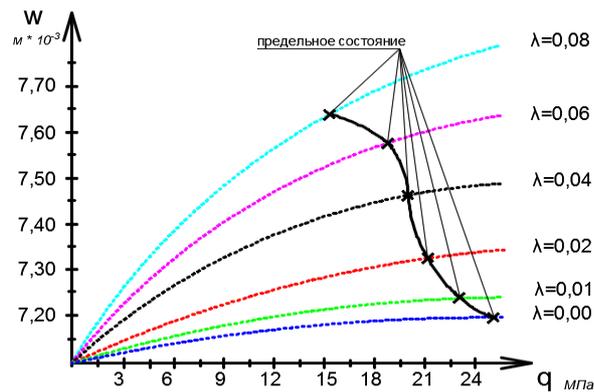


Рисунок 7 – Зависимость прогибов цилиндрической оболочки от нагрузки при разной степени наводороживания с фиксацией предельного состояния

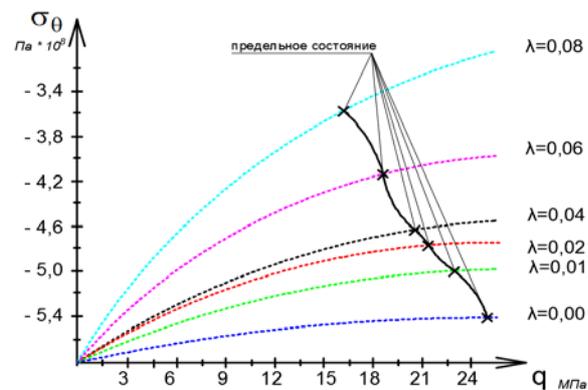


Рисунок 8 – Зависимость окружных напряжений цилиндрической оболочки от нагрузки при разной степени наводороживания с фиксацией предельного состояния

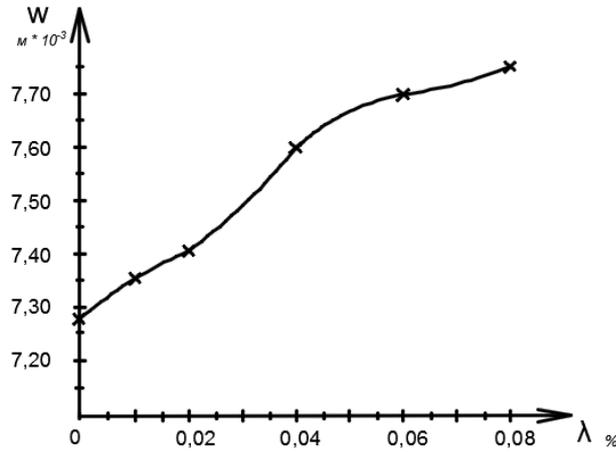


Рисунок 9 – Зависимость прогибов цилиндрической оболочки от степени наводороживания с фиксацией предельного состояния

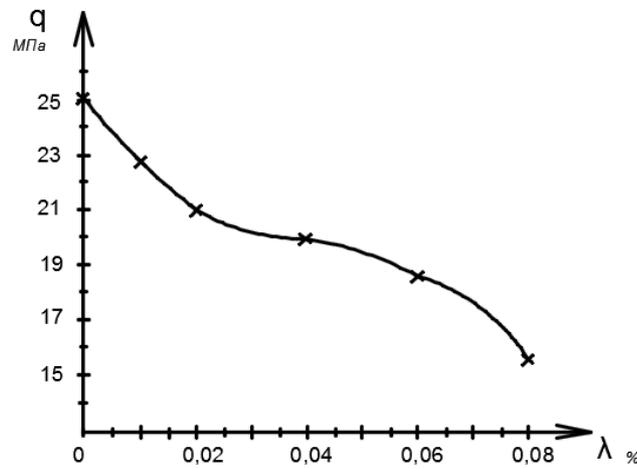


Рисунок 10 – Зависимость величины приложенной нагрузки на цилиндрическую оболочку от степени наводороживания с фиксацией предельного состояния

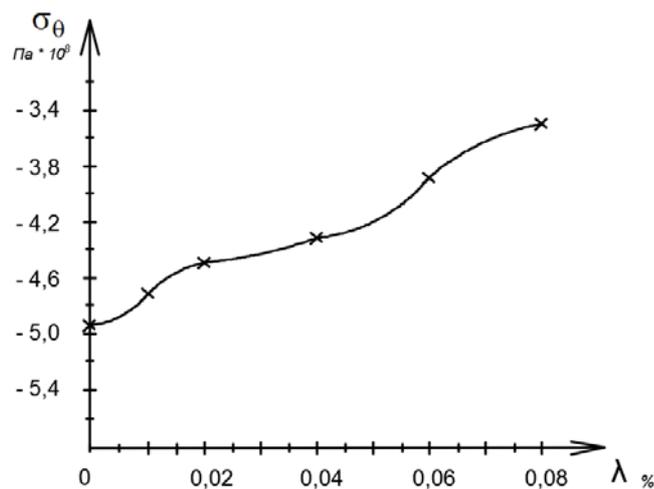


Рисунок 11 – Зависимость окружных напряжений цилиндрической оболочки от степени наводороживания с фиксацией предельного состояния

Диаграммы, изображенные на рис. 7 - 11 наглядно иллюстрируют полученные ранее результаты, подтверждающие тот факт, что с увеличением концентрации водорода в

материале предельное состояние конструкции по условным пределам текучести достигается при приложении к оболочке меньшей нагрузки относительно начального состояния $\lambda = 0\%$.

Выводы

Полученные результаты решения конкретной задачи деформирования тонкой круговой цилиндрической оболочки из титанового сплава TC5 свидетельствуют о необходимости применения гибкого механизма, позволяющего учитывать изменения механических характеристик материала под воздействием агрессивной водородосодержащей среды.

Диффузия водорода в сплавы титана приводит к снижению области безопасной эксплуатации конструкций, приближая наступление предельного состояния. Можно сделать вывод о том, что при увеличении степени водородонасыщения в теле конструкции снижаются условные пределы текучести и прочности сплава TC5 при тех напряженных состояниях, в которых присутствует какой-либо тип растяжения, что продемонстрировано диаграммами зависимостей величины прогибов и напряжений от нагрузки при различной концентрации водорода, представленными на рис. 7 и 8.

В данном исследовании показано снижение жесткостных характеристик конструкций на примере круговой цилиндрической оболочки, обусловленное воздействием агрессивной водородной среды.

Заключение

Множество проведенных эмпирических исследований свидетельствуют о появлении чувствительности к виду напряженного состояния в конструкциях из титановых сплавов, эксплуатируемых в агрессивной водородной среде. Установлено, что при проектировании пластинчатых и оболочечных конструкций из сплавов титана необходимо учитывать свойства наведенной разнсопротивляемости в результате наводороживания.

Основные известные модели расчета материалов с приобретенной разнсопротивляемостью имеют ряд ограничений, накладываемых на механические характеристики материала, а также они имеют не достаточную точность аппроксимации полученных результатов экспериментов при разных сложных видах напряженно-деформированного состояния.

На основе методики, предложенной в работе [7], в данной работе построен учет влияния водородосодержащей среды на конструкции из сплавов титана. Построенная модель базируется на основе нелинейных определяющих соотношений для изотропных материалов, проявляющих склонность к наведенной разнсопротивляемости. В результате исследования качественно и количественно подтвердился тот факт, что с повышением концентрации водорода в теле конструкций из сплава титана TC5 в процессе эксплуатации их в водородосодержащей среде сопротивление деформированию титановых сплавов снижается.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Овчинников И.Г., Кириллова Л.А. Учет влияния водородосодержащей среды на деформирование гибких круглых пластин. Саратов, 1988. 9 с. Рукопись представлена Саратов. политехн. ин-том. Деп. В ВИНТИ 8 августа 1988, № 6339-В88.
2. Овчинников И.Г. Модифицированная модель деформирования и разрушения материала, подвергающегося облучению // Строительная механика и расчёт сооружений, 2014. №1. С. 29-35.
3. Mavzovin V.S., Ovchinnikov I.G. Modeling of kinetics of corrosion cracking of metals using the long durability theory by A.R. Rzhantsyn // IOP Conf. Series. Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. Paper ID 012019. DOI:10.1088/1742-6596/1425/1/012019.

4. Работнов Ю.Н. О механизме длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. Москва: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
5. Работнов Ю.Н. Избранные труды. Проблемы механики деформируемого твердого тела. Москва: Наука, 1991 196 с.
6. Кузнецова В.О., Трещев А.А. Деформирование цилиндрической оболочки из титанового сплава под воздействием агрессивной водородсодержащей среды // Строительная механика и конструкции. 2022. №2 (33). С. 26-39.
7. Трещев А.А. Деформирование конструкций из титановых сплавов с учетом их наводороживания: монография. Москва: Тула: ТулГУ, 2022. 462 с.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Наука, 1966. 636 с.
9. Петров В.В., Кривошеин И.В. Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала. Москва: АСВ, 2009. 208 с.
10. Биргер И.А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Москва: Оборонгиз, 1956. 151 с.

REFERENCES

1. Ovchinnikov I.G., Kirillova L.A. *Uchet vliyaniya vodorodosoderzhashchej sredy na deformirovanie gibkih kruglyh plastin* [Accounting for the influence of a hydrogen-containing medium on the deformation of flexible round plates]. Saratov, 1988/ 9 p. *Rukopis' predstavlena Sarat. politekhn. in-tom. Dep. V VINITI 8 avgusta 1988, № 6339-V88.*
2. Ovchinnikov I.G. *Modificirovannaya model' deformirovaniya i razrusheniya materiala, podvergayushchegosya oblucheniyu* [Modified model of deformation and destruction of a material subjected to irradiation]. *Stroitel'naya mekhanika i raschyot sooruzhenij*. 2014. No 1, pp. 29-35.
3. Mavzovin V.S., Ovchinnikov I.G. Modeling of kinetics of corrosion cracking of metals using the long durability theory by A.R. Rzhantsyn. IOP Conf. Series. Journal of Physics: Conf. Series. 2020. Vol. 1425. Paper ID 012019. DOI:10.1088/1742-6596/1425/1/012019.
4. Rabotnov Yu.N. *O mekhanizme dlitel'nogo razrusheniya. Voprosy prochnosti materialov i konstrukcij* [On the mechanism of long-term destruction. Questions of the strength of materials and structures]. Moscow: Izd-vo AN SSSR, 1959, pp. 5–7.
5. Rabotnov Yu.N. *Problemy mekhaniki deformiruемого tverdogo tela* [Problems of Mechanics of a Deformable Solid Body Selected works] *Izbrannye trudy*. Moscow: Nauka, 1991 196 p.
6. Kuznetsova V.O., Treshev A.A. *Deformirovanie cilindricheskoj obolochki iz titanovogo splava pod vozdeystviem agressivnoj vodorodosoderzhashchej sredy* [Deformation of a cylindrical shell made of a titanium alloy under the influence of an aggressive hydrogen-containing medium]. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii*. 2022. No 2 (33), pp. 26-39.
7. Treshev A.A. *Deformirovanie konstrukcij iz titanovyh spлавov s uchetom ih navodorozhivaniya: monografiya*. [Deformation of structures made of titanium alloys with allowance for their hydrogenation.: *monografiya*]. Moscow: Tula: TulGU, 2022. 462 p.
8. Timoshenko S.P., Voinovsky-Krieger S. *Plastinki i obolochki*. [Plates and shells]. Moscow: Nauka, 1966. 636 p.
9. Petrov V.V., Krivoshein I.V. *Metody rascheta konstrukcij iz nelinejno-deformiruемого materiala*. [Methods for calculating structures from a nonlinearly deformable material]. Moscow: ASV, 2009. 208 p.
10. Birger I.A. *Nekotorye matematicheskie metody resheniya inzhenernyh zadach* [Some mathematical methods for solving engineering problems]. Moscow: Oborongiz, 1956. 151 p.



ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Трещев Александр Анатольевич – член-корреспондент РААСН, доктор технических наук, профессор, Тульский государственный университет (300012, Россия, г. Тула, пр. Ленина, 92, e-mail: taa58@yandex.ru)

Кузнецова Виолетта Олеговна – ассистент, Тульский государственный университет (300012, Россия, г. Тула, пр. Ленина, 92, e-mail: kuznecova_violetta@mail.ru).

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Treschev Alexander Anatolievich – Corresponding Member of the RAACN, Dr. Sci. (Eng.), Prof., Tula State University (300012, Russia, Tula, Lenin Ave., 92, e-mail: taa58@yandex.ru)

Kuznetsova Violetta Olegovna – Assistant, Tula State University (300012, Russia, Tula, Lenin Ave., 92, e-mail: kuznecova_violetta@mail.ru)

Статья поступила в редакцию 18.04.2022; одобрена после рецензирования 04.05.2022, принята к публикации 11.05.2023.

The article was submitted 18.04.2023; approved after reviewing 04.05.2023; accepted for publication 11.05.2023.