

УДК 628.2

ЗАВИСИМОСТЬ ГЛУБИНЫ СЛОЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЦИСТЕРНЕ ОТ ОБЪЕМА ПЕРЕКАЧИВАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В.А. Наумов

DEPENDENCE OF THE LAYER DEPTH IN A CYLINDRICAL TANK ON THE PUMPED LIQUID VOLUME

V.A. Naumov

Аннотация. При моделировании вакуумных установок для перекачивания жидкостей задача наполнения цилиндрической цистерны не имеет аналитического решения. Разработан алгоритм, позволяющий рассчитывать глубину слоя жидкости в цилиндрической цистерне по величине объема. Безразмерная зависимость для цистерн с горизонтальной осью не зависит от каких-либо параметров и может быть представлена единственным образом. Для цистерн с наклонной осью необходимо учитывать влияние угла и отношения длины цилиндра к радиусу его основания.

Ключевые слова: перекачивание жидкостей; вакуумные установки; канализация; стоки; математическая модель; уровень; объем; алгоритм расчета.

Abstract. The problem of filling a cylindrical tank does not have an analytical solution when modeling vacuum units for pumping liquids. The algorithm for calculating the depth of the liquid layer in a cylindrical tank by volume has been developed. The dimensionless dependence for tanks with a horizontal axis does not depend on any parameters. It can only be represented in one way. The influence of the angle and the ratio of the length of the cylinder to the radius of its base must be taken into account for tanks with an inclined axis.

Keywords: pumping of liquids; vacuum units; sewage; drains; mathematical model; level; volume; calculation algorithm.

Введение

Цилиндрические цистерны используются в качестве рабочих емкостей вакуумных устройств для перекачивания жидкостей в канализационных установках [1, 2], химической промышленности [3, 4], рыбном хозяйстве [5, 6] и других отраслях. Для повышения эффективности проектирования и эксплуатации таких установок применяются математические модели [7, 8]. Гидравлическая модель формируется на базе нестационарного уравнения Бернулли. При этом необходимо задать зависимость глубины слоя в цистерне H от текущего объема перекачиваемой жидкости V . Если ось цилиндрической цистерны расположена вертикально, то глубина слоя легко рассчитывается как частное деления перекачанного к данному моменту объема жидкости $V(t)$ на площадь поперечного сечения цилиндра (рис. 1). Однако гораздо чаще, по технологическим соображениям ось цистерны располагают горизонтально (рис. 2 и 3) или даже под некоторым углом β к горизонтальной плоскости. Тогда невозможно аналитически выразить H через V .

Цель данной статьи – разработать алгоритм расчета глубины слоя по заданному объему жидкости в цилиндрической цистерне с горизонтальной или наклонной осью.

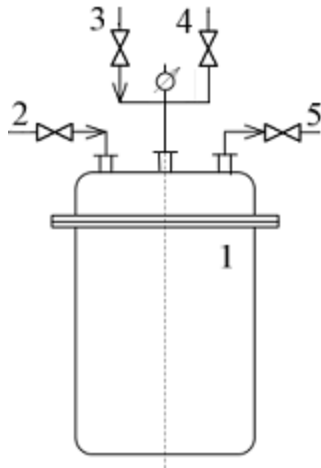


Рисунок 1 – Монтежю [4]: 1 – корпус; 2 – линия подачи жидкости; 3 – линия подачи сжатого газа; 4 – линия вакуума; 5 – нагнетательный трубопровод

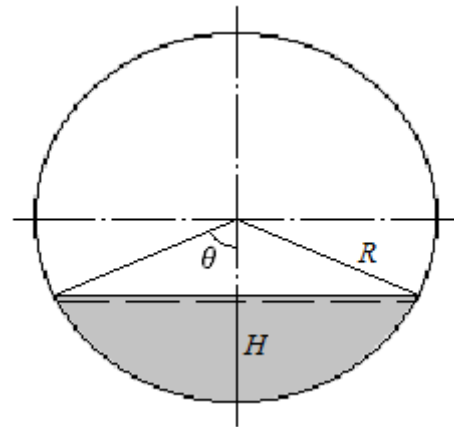


Рисунок 2 – Поперечное сечение цилиндрической цистерны с горизонтальной осью: R – радиус окружности, H – глубина слоя жидкости



Рисунок 3 – Общий вид канализационной установки КО-503В на базе автомашины ГАЗ-3307 [2]: 1 – цистерна, 2 – люк для присоединения рукава

Цилиндр с горизонтальной осью

Сначала рассмотрим случай, когда ось цилиндра расположена горизонтально (рис. 2). Известна формула для площади сегмента, рассчитываемой по величине угла θ в радианах (см., например, [9]):

$$S = 0,5 \cdot R^2(2\theta - \sin(2\theta)). \quad (1)$$

Объем слоя жидкости в такой цистерне длиной L , с радиусом основания R :

$$V = S \cdot L = R^2 L(\theta - 0,5 \cdot \sin(2\theta)). \quad (2)$$

Перейдем к безразмерному объему жидкости v и глубине слоя h :

$$v = V / V_0 = (\theta - 0,5 \cdot \sin(2\theta)) / \pi, \quad h = H / R = 1 - \cos \theta. \quad (3)$$

Нелинейность не позволяет из (3) получить аналитическую зависимость $h=f(v)$. Поэтому для ряда значений $v \in [0; 1]$ численным методом решаем систему алгебраических

уравнений (3), получаем соответствующий им ряд значений безразмерных глубин h_e . В среде Mathcad используем кубическую сплайн-функцию для аппроксимации зависимости h_e от v_e . По рис. 4 видно хорошее согласие полученного решения и сглаживающих функций.

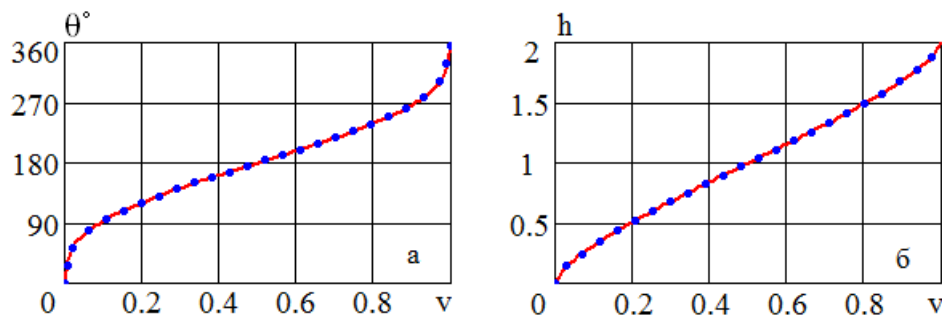


Рисунок 4 – Зависимости от безразмерного объема слоя: а – угла сегмента, б – глубины слоя. Точки – результаты решения системы уравнений (3), линии – кубическая сплайн-аппроксимация

Цилиндр с наклонной осью

Далее рассмотрим случай, когда ось цилиндра расположена под углом β к горизонтальной плоскости, например, как у цистерны рыбонасосной установки фирмы Euskan (рис. 2).



Рисунок 5 – Вид цистерны рыбонасосной установки фирмы Euskan [6]

На рис. 6 представлена схема расположения жидкости в цилиндрической цистерне с наклонной осью. Формулы для расчета характерных высот:

$$h_1 = H_1 / R = l \cdot \sin \beta, \quad h_2 = H_2 / R = 2 \cdot \cos \beta, \quad l = L / R. \quad (4)$$

Здесь ограничимся практически важным случаем, когда $H_1 < H_2$. При небольшой глубине слоя ($H < H_1$) геометрическое тело, форму которого принимает жидкость, представляет собой, так называемое, «цилиндрическое копыто» (ЦК), показанное на рис. 7.

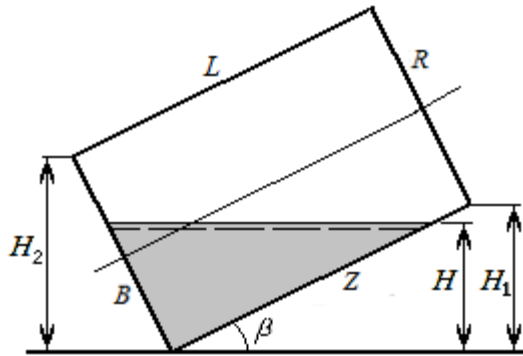


Рисунок 6 – Схема цилиндрической цистерны с наклонной осью ($H < H_1$)

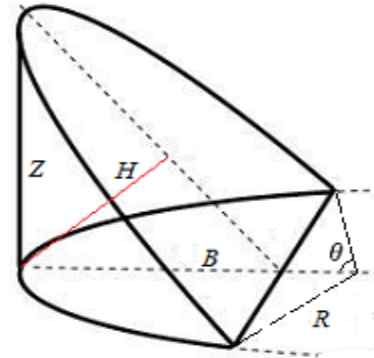


Рисунок 7 – Схема сечения цилиндра (цилиндрическое копыто)

В справочнике [9] с помощью интегрирования получены формулы, выражающие объем ЦК через различные параметры, обозначенные на рис. 7. Для цели данной статьи наиболее подходящей является формула (5):

$$V_{ЦК} = \frac{R^2 Z}{B} \cdot \left[\sqrt{2RB - B^2} \cdot \frac{3R^2 - 2RB + B^2}{3R^2} - (R - B) \arccos\left(\frac{R - B}{R}\right) \right]. \quad (5)$$

Величина, отнесенная к объему всего цилиндра:

$$v_{ЦК} = \frac{V_{ЦК}}{\pi R^2 L} = \psi_1(h) = \frac{z}{\pi \cdot b \cdot l} \cdot \left[\left(1 - \frac{2b - b^2}{3} \right) \cdot \sqrt{2b - b^2} - (1 - b) \cdot \arccos(1 - b) \right], \quad (6)$$

$$z = Z / R = h / \sin \beta, \quad b = B / R = h / \cos \beta.$$

Рассмотрим далее случаи, когда глубина слоя жидкости $H > H_1$ (рис. 8).

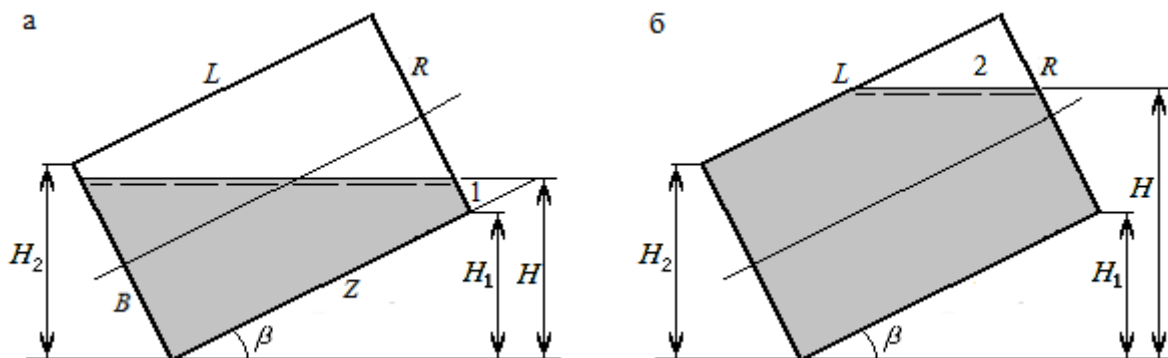


Рисунок 8 – Схема цилиндрической цистерны с наклонной осью при больших глубинах:
а – $H_1 \leq H \leq H_2$; б – $H > H_2$

На рис. 8а изображена схема при $H_1 \leq H \leq H_2$. При таком условии объем жидкости находится как разность объемов двух ЦК: первого с высотой H , и второго с высотой $(H - H_1)$, обозначенного на рис. 8а цифрой 1. На рис. 8б $H > H_2$, объем жидкости находится как разность объемов всего цилиндра и ЦК с высотой $(H_1 + H_2 - H)$, обозначенного на рис. 8б цифрой 2.

Тогда для всего диапазона глубин можем записать безразмерную зависимость объема жидкости от глубины:

$$v = \psi(h) = \begin{cases} \psi_1(h), & \text{при } h \leq h_1; \\ \psi_1(h) - \psi_1(h - h_1), & \text{при } h_1 < h < h_2; \\ 1 - \psi_1(h_1 + h_2 - h), & \text{при } h \geq h_2. \end{cases} \quad (7)$$

Невозможно из (7) аналитически получить обратную зависимость $h = \psi^{-1}(v)$. Воспользуемся таким же численным методом, как и для цилиндра с горизонтальной осью. По рис. 9 и 10 видно рассчитанные функции изменяются при различных углах наклона оси цилиндра β и отношения l его длины к радиусу основания.

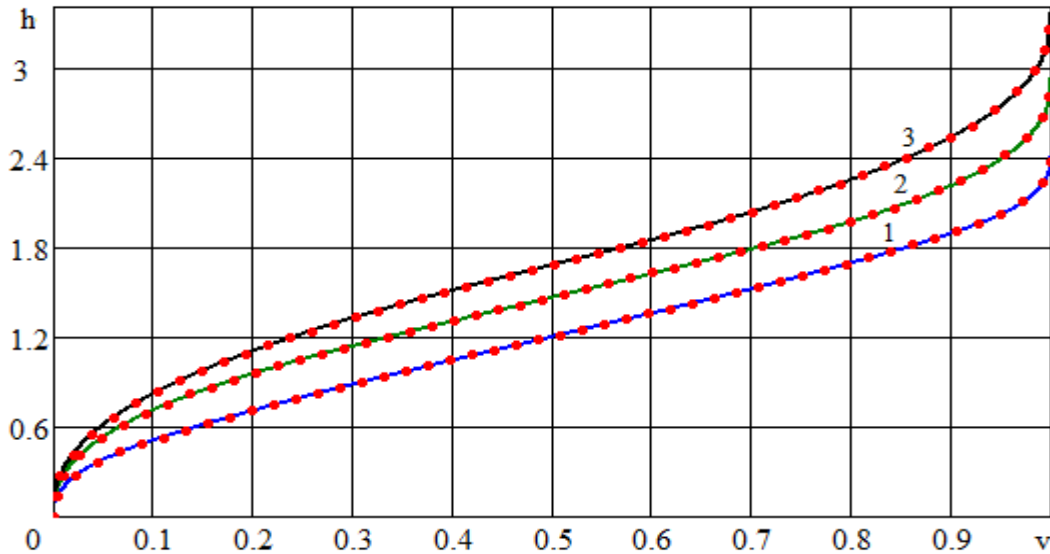


Рисунок 9 – Безразмерная зависимость глубины слоя от объема жидкости в наклонном цилиндре при $l=3,5$ и различных углах: 1 – $\beta=7^\circ$; 2 – $\beta=17^\circ$; 3 – $\beta=27^\circ$.

Точки – результаты решения (7) численным методом, линии – кубическая сплайн-аппроксимация

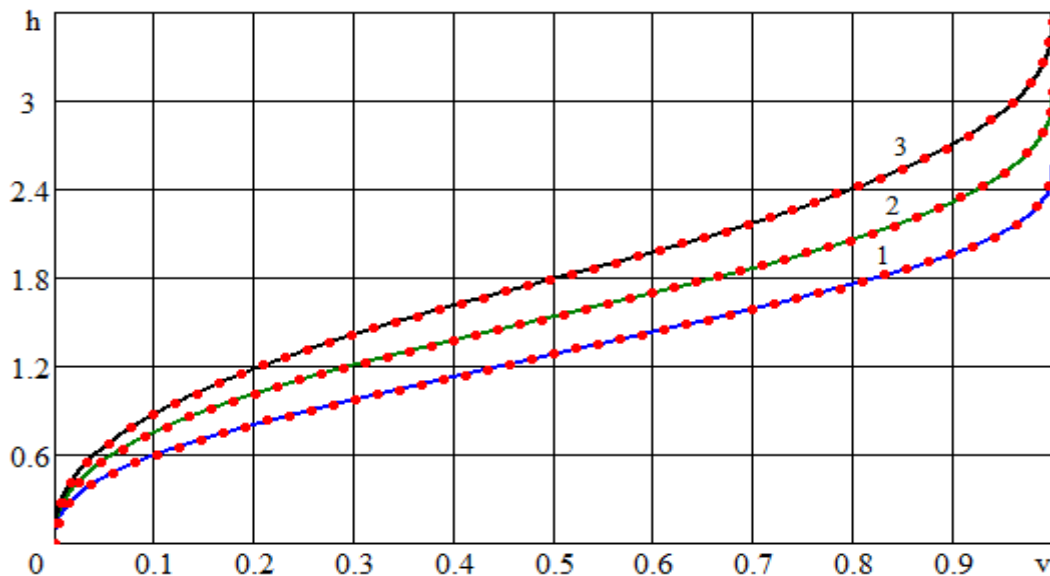


Рисунок 10 – Безразмерная зависимость глубины слоя от объема жидкости в наклонном цилиндре при $\beta=30^\circ$ и различных l : 1 – $l=2$; 2 – $l=3,5$; 3 – $l=5$

Точки – результаты решения (7) численным методом, линии – кубическая сплайн-аппроксимация

Заключение

Таким образом, разработанный алгоритм позволяет рассчитывать глубину слоя жидкости в цилиндрической цистерне по величине объема. Безразмерная зависимость для цистерн с горизонтальной осью не зависит от каких-либо параметров и может быть представлена единственным образом (например, таблично или графически). Тогда как для цистерн с наклонной осью необходимо учитывать влияние угла и отношения длины цилиндра к радиусу его основания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хренов К.Е., Богомолов М.В., Дудченко Т.О. и др. Установка вакуумной перекачки сточных вод // Водоснабжение и санитарная техника. 2010. С. 32-36.
2. Машина вакуумная КО-503В и ее модификации. Руководство по эксплуатации [Электронный ресурс]. URL: <https://www.kommash.ru/> (дата обращения 31.01.2020).
3. Yu H.M. Analysis on selection of water ring vacuum pumps in the chemical industry // Applied Mechanics and Materials. 2013. Vol. 325-326, pp. 1435-1439.
4. Леонтьев В.К., Барашева М.А. Расчет насосной установки: учебное пособие. Ярославль: Изд-во Ярославского гос. техн. университета, 2013. 134 с.
5. Великанов Н.Л., Наумов В.А. Компрессорные машины вакуумных рыбонасосов // Рыбное хозяйство. 2018. № 6. С. 78-81.
6. Euskan Fish handling systems [Электронный ресурс]. URL: <http://www.euskan.com/> (дата обращения: 31.01.2020).
7. Великанов Н.Л., Наумов В.А. Динамические характеристики вакуумных насосов и компрессоров рыбонасосных установок // Рыбное хозяйство. 2019. № 1. С. 79-83.
8. Великанов Н.Л., Наумов В.А. Моделирование характеристик водокольцевых вакуумных насосов // Известия вузов. Машиностроение. 2019. № 10. С. 70-77.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Москва: Наука, 1964. 608 с.

REFERENCES

1. Hrenov K.E., Bogomolov M.V., Dudchenko T.O., etc. *Ustanovka vakuumnoj perekachki stochnyh vod* [Unit for vacuum pumping of waste water]. *Vodosnabzhenie i sanitarnaya tekhnika*. 2010, pp. 32-36.
2. *Mashina vakuumnaya KO-503V i ee modifikacii. Rukovodstvo po ekspluatatsii* [Vacuum machine KO-503V and its modifications. Operation manual]. [Electronic resource]. URL: <https://www.kommash.ru/> (accessed 31.01.2020).
3. Yu H.M. Analysis on selection of water ring vacuum pumps in the chemical industry. *Applied Mechanics and Materials*. 2013. Vol. 325-326, pp. 1435-1439.
4. Leont'ev V.K., Barasheva M.A. *Raschet nasosnoj ustanovki: uchebnoe posobie* [Calculation of the pumping unit: textbook]. Yaroslavl: Yaroslavl State Technical University Publ. 2013. 134 p.
5. Velikanov N.L., Naumov V.A. *Kompressornye mashiny vakuumnyh rybonasosov* [Compressor machines of vacuum fish pumps]. *Rybnoe hozyajstvo*. 2018. No 6, pp. 78-81.
6. Euskan Fish handling systems [Electronic resource]. URL: <http://www.euskan.com/> (accessed: 31.01.2020).
7. Velikanov N.L., Naumov V.A. *Dinamicheskie harakteristiki vakuumnyh nasosov i kompressorov rybonasosnyh ustanovok* [Dynamic characteristics of vacuum pumps and compressors of fish-pumping units]. *Rybnoe hozyajstvo*. 2019. No 1, pp. 79-83.



8. Velikanov N.L., Naumov V.A. *Modelirovanie harakteristik vodokol'cevyyh vakuumnykh nasosov* [Modeling of characteristics of water ring vacuum pumps]. *Izvestiya vuzov. Mashinostroyeniye*. 2019. No. 10, pp. 70-77.

9. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchihsya vtuzov* [Handbook of mathematics for engineers and students]. Moscow: Nauka Publ., 1964. 608 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Наумов Владимир Аркадьевич

Калининградский государственный технический университет, г. Калининград, Россия, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой водных ресурсов и водопользования, действительный член Российской инженерной академии, действительный член Российской академии естественных наук,

E-mail: van-old@rambler.ru

Naumov Vladimir Arkad'evich

Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia, Chairman of The Water Resources Department, Doctor of Technical Science, Professor, Member of Russian Engineering Academy, Member of Russian Academy of Natural Science,

E-mail: van-old@rambler.ru

Корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с автором статьи:
236022, Россия, Калининград, Советский пр., 1, КГТУ, ГУК, каб. 372. Наумов В.А.
8(4012)99-53-37