ISSN 2413–9858

УДК 530.145 + 535(13:14)

ДИСПЕРСИОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ ЭНЕРГИИ И ВРЕМЕНИ И КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ

А.П. Давыдов

DISPERSIVE INTERPETATION OF ENERGY-TIME UNCERTAITY RELATION AND QUASI-STATIONARY STATES

A.P. Davydov

Аннотация. Предложена и из общих квантовомеханических соображений обоснована «дисперсионная» трактовка соотношения неопределенностей для энергии и времени. Для ее иллюстрации рассмотрены распады квазистационарных состояний с позиций классической электродинамики, «квазиклассического» подхода и квантовой механики. Уточняются критерии длительности излучения и ее связь со среднеквадратичным отклонением момента времени наступления соответствующего перехода. Обращается внимание, что в спектральный состав излучения, возникающего в результате распадов квазистационарных состояний, заметный вклад могут вносить отрицательные энергии виртуальных фотонов.

Ключевые слова: *квантовая механика; волновая функция; вероятность момента перехода; квазиклассический подход; неопределенность момента времени.*

Abstract. The «dispersive» interpretation of energy-time uncertainty relation substantiated in the frame of general quantum-mechanical considerations is being proposed. For illustration the quasi-steady states decays are discussed from the points of view of classical electrodynamics, quasi-classical approach and quantum mechanics. The criterions of radiation duration are précised, and also its connection with root-mean-square deviation of time moment of corresponding transition coming. It is noted that negative energies of virtual photons can make a significant contribution to the spectral composition of the radiation resulting from the decay of quasi-stationary states.

Key words: *quantum mechanics; wave function; probability of the moment of transition; quasi-classical approach; time uncertainty.*

Введение. Известно, что соотношение неопределенностей для энергии и времени в квантовой механике имеет несколько вариантов толкования [1]. Однако для корректного применения этого соотношения в некоторых *специальных* случаях, ему можно придать еще одну интерпретацию, – так сказать, «дисперсионную». Одним из таких случаев является использование этого соотношения при моделировании направленного электромагнитного излучения с помощью *волновой функции фотона в координатном представлении* [2–10]. Для *свободного* фотона она представляет собой волновой пакет, построенный из бивекторов, которые являются собственными функциями операторов энергии, импульса и спиральности.

Чтобы моделирование можно было проводить более адекватно к реальному излучению, *когда в качестве одного из исходных параметров задается время излучения волнового пакета*, надо, по возможности, более точно извлекать связи, вытекающие из соотношения неопределенностей для энергии и времени. Здесь, как раз, и возникают некоторые новые, на наш взгляд, тонкости, связанные с этим соотношением.

Цель статьи – развить «дисперсионную» интерпретацию соотношения неопределенностей для энергии и времени, обосновав это соотношение в рамках квантовой механики в общих чертах, уделив в первую очередь внимание методу формулировки понятия среднего квадратичного момента времени Δt *соответствующего характерного события, присущего определенному переходу квантовой системы из одного состояния в другое.*

Хотя соотношение (1) для предлагаемого в данной статье квантовомеханического способа вычисления Δt строго не доказывается, в том же духе, что и соотношения неопределенностей Гейзенберга, тем не менее, указанную трактовку наглядно можно проиллюстрировать на примере кратковременных лазерных импульсов [11–15] и волнового пакета, описывающего свободное движение квантовой частицы [16–18].

Актуальность и сама идея предлагаемой интерпретации возникли в процессе изучения эволюции в пространстве-времени волнового пакета, описывающего распространение свободного фотона. Для него соответствующая одночастичная волновая функция *в координатном представлении* однозначно определяется всего несколькими параметрами, которые требуется задать из каких-либо физических соображений. Часто первоначально полагается *неизвестной* ширина Γ_ν, Γ_λ, Γ_E линии излучения по какой-нибудь шкале – соответственно, частоты, длины волны, энергии, и вместо них задается некий “временной” параметр τ, например, «время когерентности», время излучения одного лазерного импульса, длительность одного “цуга” волн и т. п. Тогда величину Γ_E приближенно можно попытаться оценить, используя соотношение неопределенностей для энергии и времени.

Для более точной оценки нужно учитывать, с одной стороны, механизм излучения и связанный с ним физический смысл, который вкладывается в параметр τ. С другой стороны, необходимо более корректно использовать и само соотношение неопределенностей, проанализировав истоки его возникновения в квантовой механике. Этот анализ, в целом, проводится ниже. Затем, для иллюстрации, его выводы проецируются на важный частный случай – распад квазистационарных состояний, по отношению к которому часто применяется соотношение неопределенностей для энергии и времени для различных целей.

1. Общие квантовомеханические соображения относительно возможности дисперсионной интерпретации соотношения неопределенностей для энергии и времени. Итак, хотя имеются оригинальные способы получения соотношения неопределенностей для энергии и времени для некоторых частных случаев ([19–21]), наиболее общий «способ», на наш взгляд, основан, все же, на коммутационном соотношении $[i\hbar\partial/\partial t, t] = i\hbar$ между «операторами» энергии и времени, из которого сразу следует

$$\Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2\,. \tag{1}$$

Считается (см., например, [22, с. 119]), что таким способом соотношение (1) получается формально, и его смысл совершенно иной по сравнению с другими соотношениями неопределенностей в квантовой механике. Тем не менее, соотношение (1), *полученное данным способом*, часто выбирают в качестве изначального «ориентира» и для практических оценок сводят его к виду (2), приведенному ниже.

С этой целью в (1) обычно ставят приближенный знак равенства. Далее, неопределенность энергии заменяется величиной $\Gamma_E/2$ (имеющей, однако, интерпретацию, часто отличную от среднего квадратичного отклонения, которое, например, для *лоренцева распределения* равно бесконечности) или устраняют 1/2 в правой части (1) менее законно, обосновывая это тем, что в эксперименте измеряется не сама энергия данного состояния, а разность энергий при переходе системы из одного состояния в другое, хотя часто энергия конечного состояния не имеет разброса, если состояние является основным. Наконец, вместо Δt понимается либо длительность излучения или процесса измерения энергии, либо продолжительность отрезка времени, на котором совершается переход системы из одного состояния в другое, либо время жизни квазистационарного состояния, либо время когерентности и т. д. То есть с Δt совершаются еще более широкие «метаморфозы». По-видимому, в первую очередь, по той причине, что «время течет непрерывно, поэтому нет той средней точки, относительно которой можно было бы рассматривать Δt как разброс каких-то моментов времени» ([22, с. 119]).

ISSN 2413–9858

В результате, из первоначального соотношения неопределенностей (1) в наиболее употребительной форме “вытекает” приближенное равенство

$$\Gamma_E \tau \approx \hbar\,, \tag{2}$$

где под τ понимается любая «подходящая» величина, в том числе и «время излучения», интерпретируемое как с классической точки зрения, так и с квантовой.

Однако *применительно к лазерному излучению* соотношение (2), если оно используется для практических оценок, *следует уточнить*. А именно, если под τ полагать время излучения одного лазерного импульса и обозначить его как τ_{rad}, то с учетом (1), «уточненное неравенство» должно иметь вид

$$\Gamma_E \tau_{rad} \ge 2\hbar\,, \tag{3}$$

поскольку для лазерных импульсов должно иметь место примерное равенство

$$\Delta t \approx \tau_{rad}/2\,. \tag{4}$$

Если теперь в (3) также проставить знак «$\approx$», то получится соотношение

$$\Gamma_E \tau_{rad} \approx 2\hbar\,, \tag{5}$$

в котором правая часть в 2 раза больше, чем в (2), хотя все величины как будто одинаковы по смыслу. Происходит это оттого что при переходе от (1) к (2) или (3) не в полной мере анализируется тот смысл, который вкладывается в параметр τ, причем, главным образом, – по той причине, что в (1) не учитывается возможность интерпретации величины Δt как *среднего квадратичного отклонения момента времени* наступления соответствующего характерного события, например, излучения фотона или распада квазистационарного состояния системы.

В данной статье мы попытаемся «реабилитировать» такую возможность и, тем самым, придать неравенству (1), а точнее, его “квадрату”, обычную, так сказать, «*дисперсионную*» интерпретацию – такую же, что и у всех соотношений неопределенностей в квантовой механике. Другие интерпретации, если не относятся к затронутым здесь аспектам, разумеется, остаются в силе. В частности, это касается традиционной интерпретации, связанной с точностью и длительностью измерения энергии квантовой системы.

Как сказано выше, наиболее «быстро» это соотношение, *причем именно в виде* (1), вытекает «автоматически» из коммутационного соотношения $\left[i\hbar\partial/\partial t, t\right] = i\hbar$ между «операторами» энергии и времени, из которого оно, так сказать, сразу и «следует». Но в таком случае величины ΔE и Δt в (1) должны означать *среднеквадратичные отклонения* энергии системы и *момента времени ее соответствующего перехода*.

Именно в такой интерпретации соотношение (1) было ранее строго доказано для двух случаев: 1) при *квазиклассическом* описании электромагнитного излучения [12, 23, 24]; 2) при введении в рамках квантовой механики оператора времени, *временного* представления и интегрировании по времени [25, 26], вместо интегрирования по конфигурационному пространству при общеизвестном доказательстве соотношений неопределенностей Гейзенберга. Хотя в рамках *временного* представления удается ввести дисперсию момента времени, но привязать ее к моментам перехода квантовой системы из одного состояния в другое очевидным образом возможности не возникает. Этот вопрос имеет интерес для дальнейшего изучения.

Заметим, что проблема *точности* измерения *момента* времени t перехода системы (в другое состояние) не ставится и не обсуждается – она (точность) обычно неявно предполагается быть сколь угодно высокой и ограничивается лишь экспериментальными возможностями. Поэтому здесь даже не возникает необходимости рассматривать какого-либо рода дисперсию момента t и, тем более, связывать ее с дисперсией энергии.

Однако такое «положение» остается допустимым, *пока дело не касается измерения момента времени перехода квантовой системы из одного состояния в другое*. Согласно квантовой механике, такие переходы совершаются вероятностно-статистическим путем, при котором *момент времени* t *уже является случайной величиной*. Поэтому если бы в эксперименте напрямую измерялся момент времени перехода какой-либо отдельно взятой квантовой системы, то для характеристики перехода, кроме *вероятности перехода в единицу времени*, вполне можно было бы рассматривать и *дисперсию* D_t *момента времени* t этого перехода. Разумеется, после каждого перехода и «наблюдения» момента времени t, квантовую систему для совершения повторного «наблюдения» нужно было бы снова возвращать в исходное состояние или, если это невозможно, воссоздавать новую тождественную квантовую систему в том же самом начальном состоянии.

Однако наблюдать за *одной отдельно взятой квантовой системой*, например, атомом или ядром, и ее переходами в другие состояния технически чрезвычайно сложно. Поэтому реально наблюдение производится сразу за *статистическим ансамблем* из большого числа тождественных (*невзаимодействующих*) систем, находящихся в одинаковых «макроскопических» условиях. Так, вероятность распада ядра в единицу времени и его среднее время жизни измеряется по количеству зарегистрированных распадов ядер, находящихся в большом, «макроскопическом», количестве радиоактивного препарата.

По-видимому, даже в опытах «над одной частицей» никогда не измерялись *сами моменты времени* каких-либо событий, характеризующих соответствующую *функцию распределения вероятностей моментов времени наступления этих событий*. Опыты же «над статистическим ансамблем» вообще обычно проводятся в стационарных условиях. Так, рассеяние частиц на определенной мишени производится стационарным пучком. Причем часто применяемые в опытах “схемы совпадений” также преследуют другие цели, выделяя лишь временную корреляцию между соответствующими событиями.

Поэтому, в эксперименте *функция распределения вероятностей моментов времени* каких-либо событий по-видимому, *напрямую* не измеряется; не придается ей и важного некоторого значения.

Следовательно, единственными пока *уже проведенными* экспериментами, из которых можно извлечь информацию о *функции распределения вероятностей моментов времени*, являются, очевидно, эксперименты по измерению количества распадов квазистационарных состояний, произошедших к заданному моменту времени t. Характерным примером здесь являются измерения периодов полураспада ядер.

Рассмотрим этот пример подробнее с более общей позиции квазистационарных процессов.

2. Квазистационарные процессы и соотношение неопределенностей для энергии и времени. Вообще, тщательно проведенное рассмотрение квазистацонарных процессов в рамках решения поставленной задачи выявляет многие сами по себе весьма интересные детали (см. ниже). Для наших целей, тем не менее, в первую очередь, возникает необходимость построить *функцию распределения вероятностей моментов времени* распада определенной квазистационарной системы. Это наиболее ясно можно сделать, очевидно, на примере радиоактивного распада ядер.

2.1. Распределение вероятностей моментов времени распада квазистационарной системы. В случае распадов ядер *эквивалентность* результатов многократных наблюдений «над одной частицей» и наблюдений «сразу над статистическим ансамблем» означает, что количество $N_{dec}(t)$ распавшихся к моменту времени t ядер из всего взятого начального (достаточно большого) числа N_0 нераспавшихся ядер в момент $t=0$ равно количеству *моментов времени* $t_i \le t$ распада каждого (из N_0) отдельно взятого для наблюдения ядра, *как если бы* удалось за ним проследить и измерить момент t_i его распада, повторяя с ним одну и ту же процедуру наблюдения, начиная с момента $t=0$.

Тогда, зная $N_{dec}(t)$, можно экспериментально оценить вероятность $W_{dec}(t)$ распада одного ядра к моменту времени t, а также вероятность $W_{live}(t)$ того, что к этому моменту ядро останется «живым»:

$$W_{dec}(t) = N_{dec}(t)/N_0 = \left[N_0 - N_{live}(t)\right]/N_0 = 1 - W_{live}(t), \quad W_{live}(t) = N_{live}(t)/N_0 . \tag{6}$$

Так как функция $N_{live}(t)$, согласно основному закону радиоактивного распада, хорошо известна, а именно,

$$N_{live}(t) = N_0 \exp(-\lambda t), \tag{7}$$

где λ – (не зависящая от времени) вероятность распада одного ядра в единицу времени,

$$\lambda = \frac{dN_{dec}(t)}{N_{live}(t)\,dt} = -\frac{dN_{live}(t)}{N_{live}(t)\,dt}, \tag{8}$$

то и вероятности (6) также хорошо известны:

$$W_{dec}(t) = 1 - \exp(-\lambda t); \quad W_{live}(t) = \exp(-\lambda t). \tag{9}$$

С другой стороны, функцию распределения вероятностей $W_{dec}(t)$ можно представить как интеграл от плотности $f(t)$ вероятности $dW_{dec}(t)$ того, что ядро распадется в интервале времени $(t,\ t+dt)$:

$$W_{dec}(t) = \int_0^t dW_{dec}(t) \equiv \int_0^t f(t)\,dt = \int_0^t \frac{dW_{dec}(t)}{dt}\,dt = \int_0^t \lambda \exp(-\lambda t)\,dt = 1 - \exp(-\lambda t), \tag{10}$$

где, таким образом, плотность вероятности попадания *момента* распада ядра в интервал $(t,\ t+dt)$, равна

$$f(t) \equiv \frac{dW_{dec}(t)}{dt} = \frac{dN_{dec}(t)}{N_0\,dt} = -\frac{dN_{live}(t)}{N_0\,dt} = \lambda\,\frac{N_{live}(t)}{N_0} = \lambda\,W_{live}(t) = \lambda \exp(-\lambda t). \tag{11}$$

Эту функцию часто применяют лишь для вычисления *среднего времени жизни* τ *ядра*, полагая, по сути, его равным среднему моменту $\bar{t}$ распадов ядер, *образующих статистический ансамбль*:

$$\tau = \bar{t} = \int_0^\infty t\,f(t)\,dt = \lambda \int_0^\infty t \exp(-\lambda t)\,dt = \frac{1}{\lambda}. \tag{12}$$

Однако на этом характеристики распределений (9), (11) не заканчиваются. А именно, как и для любых распределений, для них можно вычислить центральные моменты следующих порядков, дисперсию D_t момента времени t распадов ядер, коэффициенты асимметрии и эксцесса и т. д. Нас здесь будет интересовать только D_t и среднее квадратичное отклонение Δt момента t распада ядер.

По-видимому, эти характеристики в связи с изучением распадов ядер или квазистационарных состояний других квантовых систем, обычно не обсуждаются, хотя и легко вычисляются. Это связано с тем, что обычно не возникает необходимости вводить в рассмотрение *распределение вероятностей моментов времени наступления каких-либо событий*, происходящих с квантовыми системами, несмотря на то, что, например, сама по себе теория квантовых переходов хорошо развита, и в ней всегда, в частности, вычисляются вероятности переходов в единицу времени.

Тем не менее, если расширить области применения функций (9), (11) и, вообще, другие соответствующие функции *распределения вероятностей моментов времени наступления каких-либо событий* в квантовых системах, то можно установить еще одну из возможных интерпретаций соотношения неопределенностей для энергии и времени – «*дисперсионную*».

Очевидно, в данной интерпретации средний момент времени $\bar{t}$ уже не только имеет право на существование, в отличие от процитированного выше утверждения об отсутствии «той средней точки, относительно которой можно было бы рассматривать Δt как разброс каких-то моментов времени» ([22], с. 119), но и *представляет собой центральное понятие*. Этот средний момент $\bar{t}$ *при многократных повторных наблюдениях* «над одной и той же» квантовой системой (или, если она каждый раз необратимо разрушается, как, например, распадающееся ядро, то – при наблюдениях над тождественной системой, помещенной в одинаковые макро- и микроскопические условия, в том числе, начальные) просто равен среднему значению момента времени t наступления данного события в квантовой системе. Наряду с $\bar{t}$, также имеют право на существование и другие характеристики событий, связанные с их распределением по времени.

В частности, аналогично (12), вычисляется *средний квадрат момента времени распада ядер* (образующих статистический ансамбль) равный, в свою очередь, тому значению, которое бы получилось, если бы на опыте удалось многократно наблюдать *каждый раз* за одним единственным ядром:

$$\overline{t^2} = \int_0^\infty t^2 f(t)\,dt = \lambda \int_0^\infty t^2 \exp(-\lambda\, t)\,dt = \frac{2}{\lambda^2} = 2\tau^2. \tag{13}$$

Тогда дисперсия моментов времени t распадов ядер, с учетом (12) и (13), получается равной

$$D_t = \overline{t^2} - \bar{t}^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \tau^2, \tag{14}$$

а *среднее квадратичное отклонение* Δt *оказывается равным среднему времени жизни ядра*:

$$\Delta t = \sqrt{D_t} = \tau = \frac{1}{\lambda}. \tag{15}$$

Это означает, что переход от общего неравенства (1) к приближенному оценочному равенству (2) *для квазистационарных систем и процессов их распада или излучения* в части

ISSN 2413–9858

замены Δt на τ сделан верно, что и оправдывает само по себе широко используемое на практике равенство (2).

2.2. Распределение вероятностей энергии квазистационарной системы: классический, квазиклассический и квантовый подходы. Теперь рассмотрим вопрос о замене ΔE в (1) на $\Gamma_E/2$ при переходе к (2) применительно к *квазистационарным* системам. Этот вопрос выявляет не менее яркое физическое содержание, которое также требует проведения достаточно тщательного анализа.

Излучение или распад квазистационарных систем можно рассматривать как с точки зрения классической электродинамики, например, излучение атома, так и с точки зрения квантовой механики. В первом случае возникает понятие ширины Γ_E линии излучения за счет определенного выбора или расчета временной зависимости напряженности электрической составляющей электромагнитного поля, излучаемого системой (см., например, [27, с. 48]; [28, с. 50, 52, 54]), либо путем расчета "сразу" его интенсивности ([29], с. 127). Во втором (т. е. квантовом) случае возникает понятие ширины Γ_E уровня энергии квазистационарной системы за счет феноменологического выбора экспоненциально убывающей с течением времени амплитуды вероятности начального состояния квазистационарной системы, для вычисления вероятности перехода которой применяется теория возмущений (см., например, [27, с. 127] и ссылку там на первоисточники), либо за счет феноменологического выбора «сразу» зависимости от энергии квадрата модуля $|C_E|^2$ коэффициента разложения C_E волновой функции квазистационарного состояния системы в момент $t=0$ по волновым функциям стационарных состояний (см. [30], а также [31, с. 71, 460]), после чего получается "правильный" закон (9), либо, наконец, величина Γ_E более строго определяется в рамках квантовой электродинамики при рассмотрении излучения атомов ([32, с. 451]; [33, с. 337], и др.).

Принято считать, что классический и квантовый подходы дают одинаковые (даже «тождественные» – см. [27], с. 129) формулы распределения по частотам «интенсивности» излучения фотона атомом. Это утверждение, однако, следует уточнить. Во-первых, «истинно классический» и квантовый подходы дают все же разные распределения «интенсивности», а точнее – разную спектральную плотность излучения. А вот подход, который условно можно назвать «*квазиклассическим*» (ниже мы проясним смысл этого названия), опирающийся на классическую электродинамику, но с использованием *комплексных* выражений для напряженностей поля и других величин, – действительно дает формулы, *похожие* на формулы квантового подхода. Во-вторых, имеется существенная разница всех трех подходов с точки зрения *роли отрицательных частот* поля (или энергий фотонов) в вычислении характеристик соответствующих распределений вероятностей. Оказывается, что эта роль, в общем, не тривиальна, поскольку в не малой мере проявляет себя в формировании средних значений и дисперсий частот и, стало быть, – в получении соответствующих соотношений неопределенностей для энергии и времени для конкретных видов излучения.

Начнем с того, что «квазиклассический» (по нашему определению) подход дает (см., например, [28, с. 49]; [29, с. 129]) распределение "интенсивности" по (циклическим) частотам вида

$$I_{quasi}(\omega) = I_0 \frac{\Gamma_\omega}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma_\omega^2/4} , \qquad (16)$$

а как результат квантового подхода часто приводят (27, с. 129]; [32, с. 451]) «изначально» отличающееся от (16) множителем $\hbar\omega$ вместо I_0 распределение "интенсивности" излучения *одного* атома

$$J_{quant}(\omega)\,d\omega = \frac{\Gamma_\omega}{2\pi}\,\frac{\hbar\omega\,d\omega}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma_\omega^2/4}\,. \tag{17}$$

Разумеется, встречаются и более «изначально» уместные формулы, непосредственно выражающие собой тот смысл, который в них вкладывается при их выводе. Например, *плотность вероятности попадания частоты фотона* (любой поляризации) *в интервал* $(\omega,\ \omega+d\omega)$ при *однократном* "спонтанном" излучении *одного* атома (в любом направлении) в квантовой теории *непосредственно* получается равной

$$f_{quant}(\omega) = \frac{\Gamma_\omega}{2\pi}\,\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma_\omega^2/4} \tag{18}$$

(см., например, [34, с. 316], где, однако, явно не указан *прямой* смысл этой формулы; [35, с. 80] и др.). Формула (18), *вместе с ее прямым смыслом плотности вероятности*, как раз и совпадает, на самом деле, с приведенной ниже формулой (21), *выводимой в классической теории «не вполне законно»*, поскольку при ее выводе используется *комплексная* напряженность электрического поля (24), *а не вещественная* (25), как положено для классической физики.

Действительно, в (16) $\Gamma_\omega = 2\pi\Gamma_\nu$ – ширина линии излучения с центральной частотой ω_0; I_0 – полная «интенсивность» излучения по всем частотам, определяемая интегралом от самой же функции (16):

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} I_{quasi}(\omega)\,d\omega\,, \tag{19}$$

где вклад отрицательных частот имеет *принципиальное* значение, хотя конкретно в (19) обычно им пренебрегают, имея в виду, что на опыте «наблюдаются» только положительные частоты, а $\Gamma_\omega \ll \omega_0$. Принципиальное же значение, по крайней мере, на первый взгляд, с математической точки зрения, отрицательные частоты имеют потому, что, во-первых, точной единице равен все-таки нормировочный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma_\omega}{2\pi}\,\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma_\omega^2/4}\,d\omega = 1\,, \tag{20}$$

а не интеграл от этой же функции в пределах от 0 до ∞. Во-вторых, при получении распределения (16) *с классической точки зрения* (например, в [27, с. 48], [29, с. 128]) *незаконно* осуществляют разложения в интеграл Фурье *комплексных* выражений для напряженности поля или ускорения заряда, что и вносит *неустранимый* вклад отрицательных частот (который нельзя «*дезавуировать*»).

В классической теории, между тем, никаких *комплексных* напряженностей, ускорений или других *измеряемых* величин (как, впрочем, и в квантовой механике), разумеется, быть не должно. Поэтому многие авторы, как положено, выбирают соответствующие выражения вещественными. *Но тогда вклад отрицательных частот вообще получается в точности равным вкладу положительных*. Тем не менее, в подобных случаях *вклад отрицательных частот* принято совсем *дезавуировать* – путем перехода к интегрированию только по положительным частотам – с учетом соотношения $F(-\omega) = F^*(\omega)$ для компонент Фурье $F(\omega)$ от вещественных функций. Как нам представляется, в связи с этим, отрицательные частоты в классической электродинамике несут некий “скрытый” смысл или, точнее сказать, «намек» на их возможное проявление в эксперименте, хотя бы в качестве виртуальных фотонов с отрицательными энергиями.

Введем с помощью (16), (19) «квазиклассическую» плотность вероятности частоты излучения:

$$f_{quasi}(\omega) = \frac{I_{quasi}(\omega)}{I_0} = \frac{\Gamma_\omega}{2\pi}\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma_\omega^2/4}. \tag{21}$$

Интеграл от этой функции по частоте ω *вдоль всей вещественной оси*, в силу (20), равен точной единице, а при $\omega_0 >> \Gamma_\omega$, что обычно выполняется на практике, он равен единице с большой точностью:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{quasi}(\omega)\,d\omega = 1; \qquad \int_{0}^{\infty} f_{quasi}(\omega)\,d\omega \approx 1 \quad \text{при} \quad \omega_0 >> \Gamma_\omega. \tag{22}$$

Руководствуясь общепринятым мнением о том, что физический смысл имеют лишь положительные частоты, и используя распределения (16), (21), можно было бы «закрыть глаза» на точное равенство в (22) и, в методических целях, рассматривать в (22) только приближенное равенство с «правильным» спектром частот, если бы в обсуждаемом контексте никогда в принципе не требовалось вычислять *среднюю* частоту излучения, которая, между тем, согласно (20) – (22), получается равной

$$\overline{\omega}_{quasi} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega f_{quasi}(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega\,\frac{\Gamma_\omega}{2\pi}\frac{1}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma_\omega^2/4}\,d\omega = \omega_0. \tag{23}$$

Как сказано, именно «квазиклассическая» формула (21) совпадает, таким образом, и по смыслу, и по содержанию с формулой (18), получаемой в квантовой механике. С учетом этого, и назван соответствующий подход «квазиклассическим»: по сути, он основан на «классических» методах, но с привлечением *комплексных* выражений для напряженностей полей, ускорений частиц и т. п. Например, для напряженности электрического поля используется следующее представление, которое приводит к (21):

$$\mathcal{E}_{quasi}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < 0, \\ \mathcal{E}_0 \exp(-\Gamma_\omega t/2)\exp(i\omega_0 t), & \text{если} \quad t \ge 0. \end{cases} \tag{24}$$

Такой подход дает, тем не менее, сходные результаты с квантовым подходом относительно некоторых характеристик, таких как распределения (21) и (18). Возможно, что по этой причине «квазиклассический» подход следовало бы более обстоятельно попытаться обосновать и, вообще, «идентифицировать», с целью иногда быстрого «получения» квантовых результатов.

Заметим также, что частота ω_0 соответствует пику «интенсивности» (16), на что обычно только и обращают внимание, обсуждая это хорошо известное «квазиклассическое» (*лоренцево*) распределение (16). Однако, получить хоть какое-то *конечное* среднее значение частоты (не говоря уже о значении $\overline{\omega} = \omega_0$) соответственно *приближенному* равенству в (22) вообще нельзя, так как возникающий при этом, согласно (23), интеграл в пределах от 0 до ∞ расходится. Стало быть, если и придавать некий физический смысл распределениям (16) и

(21) и ожидать, что с их помощью можно хотя бы вычислить среднюю частоту излучения, то тогда *следует либо признать вклад отрицательных частот вполне реальным*, либо изменить или уточнить теорию, приводящую к этим распределениям во всей области частот.

Более подробный анализ роли отрицательных частот (энергий) выходит за рамки данной статьи, до последующей публикации.

Можно показать, что при классическом описании излучения атома, когда напряженность электрического поля излучения в некоторой точке пространства задается в виде

$$\mathcal{E}_{quasi}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ \mathcal{E}_0 \exp(-\Gamma_\omega t/2)\cos(\omega_0 t), & \text{если } t \geq 0, \end{cases} \tag{25}$$

«классическая» плотность вероятности того, что частота ω попадет в интервал $(\omega, \omega+d\omega)$, будет равна

$$f_{class}(\omega) = \frac{2\Gamma_\omega(\Gamma_\omega^2 + 4\omega_0^2)}{\pi(\Gamma_\omega^2 + 2\omega_0^2)} \frac{\Gamma_\omega^2 + 4\omega^2}{(4\omega^2 + 4\omega_0^2 + \Gamma_\omega^2)^2 - 64\omega^2\omega_0^2}. \tag{26}$$

Очевидно, попытка вычислить среднюю частоту с помощью классической плотности вероятности (32) в обоих случаях интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ и от 0 до $+\infty$ не приводит к разумным результатам: *в первом случае получается нуль, во втором – бесконечность*.

«Классический» подход, основанный на формуле (25), как легко убедиться, приводит, вместо (11), к более громоздкому *распределению моментов времени*

$$f_{class}(t) = \Gamma_\omega \exp(-\Gamma_\omega t) \frac{\left(\Gamma_\omega^2 + 4\omega_0^2\right)\cos^2\omega_0 t}{\Gamma_\omega^2 + 2\omega_0^2} \tag{27}$$

и *симметричному относительно* $\omega = 0$ *распределению* (26), вместо (21), (18). Формула (27) переходит в (11) в двух предельных случаях: 1) при $\omega_0 = 0$, что означает плавное убывание напряженности электрического поля, например, внутри конденсатора при его разрядке, 2) при $\omega_0 \to \infty$ и усреднении по периоду колебаний, при котором $\cos^2\omega_0 t$ заменяется на $1/2$. Распределение (26), наряду с этим, как сказано, дает “нефизическое” среднее значение $\overline{\omega} = 0$ при интегрировании от $-\infty$ до $+\infty$ и, тем более, «нефизическое» $\overline{\omega} = \infty$ при интегрировании от 0 до $+\infty$. Эти результаты позволяют сделать выбор в пользу применения «полуклассического» и квантового подходов, причем *с учетом отрицательных частот и энергий*, так как только тогда и получаются «нужные» средние значения ω_0 и E_0 для данных распределений.

Для всех трех распределений, причем при интегрировании по обеим возможным областям (от $-\infty$ до $+\infty$ и от 0 до $+\infty$) средние квадратичные отклонения $\Delta\omega$ и ΔE получаются бесконечными, что в этом отношении не дает преимущества ни одному из этих распределений. Бесконечные значения этих величин с точки зрения соотношения неопределенностей для энергии и времени, на наш взгляд, должны больше означать, лишь то обстоятельство, в связи с выполнением в этом случае неравенства

$$\Delta E\,\Delta t >> \hbar/2, \tag{28}$$

что рассматриваемые явления хорошо описываются не только квантовой механикой, но и классической, а точнее, – «квазиклассической», использующей комплексные выражения вида (24).

3. Квантовомеханический способ построения функции плотности вероятности момента перехода. *С теоретической точки зрения*, в «чисто» квантовом подходе функцию $f(t)$ можно вычислить следующим образом. Если известна волновая функция $\Psi(q,0)$ начального состояния системы (где q – совокупность обобщенных координат всех ее частиц) и найдена волновая функция $\Psi(q,t)$ системы в момент времени t, то вероятность того, что при $t>0$ система все еще будет находиться в состоянии $\Psi(q,0)$, определяется формулой (см., например, [31], с. 461):

$$P_0(t) = \left| \langle \Psi(q,0) \,|\, \Psi(q,t) \rangle \right|^2 = \left| \int \Psi^*(q,0)\, \Psi(q,t)\, dq \right|^2 . \tag{29}$$

Но по своему смыслу вероятность $P_0(t)$ равна вероятности того, что к моменту t система все еще *не совершит* рассматриваемый переход, то есть равна вероятности $W_{live}(t) = 1 - W_{tr}(t)$. Тогда, в соответствии с (11), искомая плотность вероятности $f(t)$ находится путем дифференцирования функции $P_0(t)$:

$$f(t) \equiv \frac{dW_{tr}(t)}{dt} = -\frac{dW_{live}(t)}{dt} \equiv -\frac{dP_0(t)}{dt} . \tag{30}$$

Использование этого равенства несколько упрощает вычисление средних значений $\bar{t}$ момента времени данного перехода и его квадрата $\overline{t^2}$, необходимых для вычисления Δt. Действительно, учитывая, что $P_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и интегрируя по частям в формулах для этих средних, получаем

$$\bar{t} = \int_0^\infty t\, f(t)\, dt = \int_0^\infty P_0(t)\, dt \, ; \quad \overline{t^2} = \int_0^\infty t^2 f(t)\, dt = 2 \int_0^\infty t\, P_0(t)\, dt . \tag{31}$$

Вычисление дисперсии D_E и среднеквадратичного отклонения ΔE энергии квантовой системы, очевидно, проблем не вызывает, если известна ее волновая функция $\Psi(q,t)$: тогда величины $\overline{E}$ и $\overline{E^2}$ находятся по обычным формулам квантовой механики с использованием либо гамильтониана системы, либо эквивалентного ему, при воздействии на функцию $\Psi(q,t)$, оператора энергии $\hat{E} = i\hbar\partial/\partial t$.

Заключение. Как показано в пункте 2 статьи, для квазистационарных состояний соотношение (2) вполне подходит для оценки «времени жизни» этих состояний, если под τ понимать, с классической точки зрения, время перехода (например, время излучения атома), а с квантовой точки зрения – время нахождения системы в данном квазистационарном состоянии, тогда как под Γ_E, при этом, если действительно понимать «ширину» на полувысоте соответствующей функции распределения интенсивности излучения по частотам, умноженной на $\hbar$, – с «квазиклассической» точки зрения (см. (16)), и плотности вероятности попадания энергии E системы в интервал $(E, E+dE)$ – с квантовой (см.(18)).

Однако в (2) величина Γ_E *не может быть интерпретирована как удвоенное среднее квадратичное отклонение* ΔE, как будто бы которое можно вычислить с применением соответствующих распределений. Наоборот, для лоренцева распределения, характерного для квазистационарных состояний, величина ΔE *стремится к бесконечности*. Из этого можно сделать вывод, что квазистационарные состояния весьма успешно (в определенных рамках) можно описывать и на языке классической физики, что, по сути, и имеет место, поскольку при $\Delta E \to \infty$ на самом деле осуществляется «очень сильное» неравенство (28), а не «чисто квантовое» $\Delta E \, \Delta t \approx \hbar/2$. Поэтому соотношение (2), не может служить иллюстрацией выполнения соотношения неопределенностей для энергии и времени в случае квазистационарных состояний, хотя бы по той причине, что Γ_E даже близко не приближается к ΔE.

Можно показать, что в отличие от распада квазистационарных состояний, импульсное лазерное излучение очень хорошо удовлетворяет «чисто квантовому» соотношению неопределенностей $\Delta E \, \Delta t \approx \hbar/2$. Тогда сразу становится возможным определить величину Γ_E как $\Gamma_E \approx 2\Delta E$, а время излучения одного лазерного импульса как $\tau_{rad} \approx 2\Delta t$. В таком случае из соотношения $\Delta E \, \Delta t \approx \hbar/2$ вытекает приближенное равенство (4), в котором правая часть в 2 раза больше, чем правая часть общепринятого соотношения (2), используемого для всякого рода оценок. *Таким образом, как сказано во введении, корректность применения соотношения неопределенностей для энергии и времени определяется предварительным выяснением характера механизма соответствующего излучения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В.А. О соотношении неопределенности для энергии и времени и об одной попытке его опровергнуть // ЖЭТФ. 1962. Т. 42. Вып. 4. С. 1135–1139.

2. Давыдов А.П. Волновая функция фотона в координатном представлении // Вестник МаГУ. Естественные науки. 2004. Вып. 5. С. 235–243.

3. Давыдов А.П. Квантовая механика фотона: волновая функция в координатном представлении // Электромагнитные волны и электронные системы. 2015. Т. 20. № 5. С. 43–61.

4. Давыдов А.П. Волновая функция фотона в координатном представлении. – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2015. 180 с.

5. Давыдов А.П., Злыднева Т.П. Однофотонный подход к моделированию короткоимпульсного лазерного излучения // Вестник науки и образования Севера-Запада России. Калининград, 2015. Т. 1. № 4. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2015/11/2015-№4-Давыдова.pdf.

6. Davydov A., Zlydneva T. Modeling of short-pulse laser radiation in terms of photon wave function in coordinate representation [Electronic resource] // Instrumentation engineering, electronics and telecommunications – 2015: Paper book of the International Forum IEET-2015. P. 51–63. – Izhevsk: Publishing House of Kalashnikov ISTU, 2016. 208 p. 7 MB. Режим доступа: http://pribor21.istu.ru/proceedings/IEET-2015.pdf (дата обращения: 30.10.2016).

7. Davydov A.P., Zlydneva T.P. On the reduction of free photons speed in modeling of their propagation in space by the wave function in coordinate representation [Electronic resource] // 2016 13th International scientific-technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE) – 39281 proceedings – V. 1. Novosibirsk. 2016. P. 233–240. Режим доступа: https://cloud.mail.ru/public/FBMT/KugeZk8F7/TOM01-2.pdf (дата обращения: 06.11.2016).

8. Davydov A.P., Zlydneva T.P. The Young's interference experiment in the light of the single-photon modeling of the laser radiation [Electronic resource] // Information Technologies in Science, Management, Social Sphere and Medicine (ITSMSSM 2016). 2016. P. 208–215. Режим доступа: http://www.atlantis-press.com/php/pub.php?publication=itsmssm-16 (дата обращения: 30.10.2016).

9. Давыдов А.П., Злыднева Т.П. О снижении скорости свободных фотонов при моделировании их распространения в пространстве с помощью волновой функции в

координатном представлении [Электронный ресурс] // Труды XIII междунар. научно-технической конф. АПЭП – 2016. Том 8. Новосибирск. 2016. С. 50–57. Режим доступа: https://cloud.mail.ru/public/FBMT/KugeZk8F7/TOM08.pdf (дата обращения: 30.10.2016).

10. Davydov A.P., Zlydneva T.P. The Modeling of the Young's Interference Experiment in terms of Single-photon wave function in the coordinate representation // Proc. of the IV International research conf. "Information technologies in Science, Management, Social sphere and Medicine", 2017. P. 257–265. doi: 10.2991/itsmssm-17.2017.54.

11. Давыдов А.П. Курс лекций по квантовой механике. Математический аппарат квантовой механики: учеб. пособие. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2014. 188 с.

12. Давыдов А.П. Доказательство соотношения неопределенностей для энергии и времени в рамках квазиклассического подхода описания электромагнитных сигналов и излучения // Современные проблемы науки и образования: материалы XLVII внутривуз. науч. конф. преподавателей МаГУ. Магнитогорск: МаГУ, 2009. С. 358–360.

13. Давыдов А.П. О соотношении неопределенностей для энергии и времени при квазиклассическом описании электромагнитного излучения // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 1. Материалы VII Международного симпозиума. М.: РАН, 2012. С. 80–88.

14. Давыдов А.П. Дисперсионная интерпретация соотношения неопределенностей для энергии и времени и короткоимпульсное лазерное излучение в квазиклассическом подходе // Инновации в науке / Сб. ст. по материалам XXXII междунар. науч.-практ. конф. № 4 (29). Новосибирск: Изд. «СибАК», 2014. С. 6–14.

15. Давыдов А.П. Дисперсионная интерпретация соотношения неопределенностей для энергии и времени и короткоимпульсное лазерное излучение // Вестник науки и образования Севера-Запада России. Калининград, 2017. Т. 3. № 4. [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2017/12/2017-N4-Davydov.pdf.

16. Давыдов А.П. Дисперсионная трактовка соотношения неопределенностей для энергии и времени на примере трехмерного волнового пакета квантовой частицы // Современные проблемы науки и образования: Матер. докл. XLVII внутривуз. науч. конф. преподавателей МаГУ. Магнитогорск: МаГУ, 2009. С. 340-344.

17. Давыдов А.П. Об одной реализации дисперсионной интерпретации соотношения неопределенностей для энергии и времени // Физико-математические науки и образование: сборник трудов участников Всероссийской научно-практической конференции. Магнитогорск: МаГУ, 2012. С. 107–114.

18. Давыдов А.П. О соотношении неопределенностей для энергии и времени для однофотонных состояний с гауссовским импульсным распределением // Инновации в науке / Сб. ст. по материалам LV междунар. науч.-практ. конф. № 3 (52). Новосибирск: Изд. «СибАК», 2016. С. 115–123.

19. Бор Н. Квантовый постулат и новейшее развитие атомной теории. Избранные научные труды, т. II. М.: Наука, 1971. 675 с.

20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.

21. Мандельштам Л.И., Там И.Е. Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике // Изв. АН СССР, сер. физич., 1945, т. 9, вып. 4. С. 122–128.

22. Матвеев А.Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989. 439 с.

23. Давыдов А.П. Общее доказательство соотношения неопределенностей для энергии и времени в дисперсионной трактовке в квазиклассическом и квантовом случаях // Современные проблемы науки и образования: Матер. докл. XLVIII внутривуз. науч. конф. преподавателей МаГУ. Магнитогорск: МаГУ, 2010. С. 323–325.

24. Давыдов А.П. О дисперсионной трактовке соотношений неопределенностей для энергии и времени в квантовой механике // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Т. 2. – Материалы IX Международного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения академика В.П. Макеева. М.: РАН, 2014. С. 17–24.

25. Давыдов А.П. Строгое доказательство соотношения неопределенностей для энергии и времени в духе доказательства соотношений неопределенностей Гейзенберга // Современные проблемы науки и образования: материалы XLVII внутривуз. науч. конф. преподавателей МаГУ. Магнитогорск, 2009. С. 344–346.

26. Давыдов А.П. Оператор энергии и соотношение неопределенностей для энергии и времени в квантовой механике // Инновации в науке / Сб. ст. по материалам XLIII междунар. науч.-практ. конф. № 3 (40). Новосибирск: Изд. «СибАК», 2015. С. 7–19.

27. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. – М., Л.: Гос. изд-во технико-теор. лит., 1940.

28. Бутиков Е. И. Оптика. М.: Высшая школа, 1986. 512 с.

29. Левич В. Г. Курс теоретической физики. Том I. М.: Наука, 1969. 910 с.

30. Крылов Н.С., Фок В.А. О двух основных толкованиях соотношения неопределенности для энергии и времени // ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 93.

31. Давыдов А.С. Квантовая механика. М.: Наука, 1973. 703 с.

32. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Том II. М.: Наука, 1971. 936 с.

33. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981. 432 с.

34. Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика. М.: Наука, 1976. 334 с.

35. Крайнов В.П., Смирнов Б.М. Излучательные процессы в атомной физике. М.: Высшая школа, 1983. 288 с.

REFERENCES

1. Fock V.A. *O sootnoshenii neopredelennosti dlya energii i vremeni i ob odnoy popytke ego oprovergnut'* [On the uncertainty relation for energy and time and on one attempt to disprove it] *ZhETF*, 1962. V.42, No. 4, pp. 1135–1139.

2. Davydov A.P. *Volnovaya funktsiya fotona v koordinatnom predstavlenii* [The photon wave function in the coordinate representation]. *Vestnik MaGU. Estestvennye nauki.* 2004. V.5, pp. 235–243.

3. Davydov A.P. *Kvantovaya mekhanika fotona: volnovaya funktsiya v koordinatnom predstavlenii* [Quantum mechanics of photon: the wave function in the coordinate representation]. *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*. 2015. V.20, No. 5, pp. 43–61.

4. Davydov A. P. *Volnovaya funktsiya fotona v koordinatnom predstavlenii* [The photon wave function in coordinate representation]. Magnitogorsk: Nosov MGTU, 2015. 180 p.

5. Davydov A.P., Zlydneva T.P. *Odnofotonnyj podhod k modelirovaniju korotkoimpul'snogo lazernogo izluchenija* [Single-photon approach to the modeling short-pulse laser radiation]. *Vestnik nauki i obrazovanija Severa-Zapada Rossii*. Kaliningrad, 2015. V. 1, No. 4. Available at: http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2015/11/2015-№4-Давыдова.pdf.

6. Davydov A., Zlydneva T. Modeling of short-pulse laser radiation in terms of photon wave function in coordinate representation. *Instrumentation engineering, electronics and telecommunications – 2015: Paper book of the International Forum IEET-2015*, pp. 51–63. Izhevsk: Publishing House of Kalashnikov ISTU, 2016. 208 p. 7 MB. Available at: http://pribor21.istu.ru/proceedings/IEET-2015.pdf (accessed: 30.10.2016).

7. Davydov A.P., Zlydneva T.P. On the reduction of free photons speed in modeling of their propagation in space by the wave function in coordinate representation. *2016 13th International scientific-technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE) –*

39281 proceedings. V. 1. Novosibirsk, 2016, pp. 233–240. Available at: https://cloud.mail.ru/public/FBMT/KugeZk8F7/TOM01-2.pdf (accessed: 06.11.2016).

8. Davydov A.P., Zlydneva T.P. The Young’s interference experiment in the light of the single-photon modeling of the laser radiation. *Information Technologies in Science, Management, Social Sphere and Medicine (ITSMSSM 2016)*, 2016, pp. 208–215. Available at: http://www.atlantis-press.com/php/pub.php?publication=itsmssm-16 (accessed: 30.10.2016).

9. Davydov A.P., Zlydneva T.P. *O snizhenii skorosti svobodnyih fotonov pri modelirovanii ih rasprostraneniya v prostranstve s pomoschyu volnovoy funktsii v koordinatnom predstavlenii* [On the reduction of free photons speed in modeling of their propagation in space by the wave function in coordinate representation]. *APEP–2016: Trudy XIII mezhd. nauch.-tehnich. konf.* Novosibirsk, 2016. V. 8, pp. 50–57.

10. Davydov A.P., Zlydneva T.P. The Modeling of the Young's Interference Experiment in terms of Single-photon wave function in the coordinate representation. *Proc. of the IV International research conf. "Information technologies in Science, Management, Social sphere and Medicine", 2017, pp. 257–265. doi: 10.2991/itsmssm-17.2017.54.*

11. Davydov A.P. *Kurs lektsiy po kvantovoy mekhanike. Matematicheskiy apparat kvantovoy mekhaniki: ucheb. posobie* [A course of lectures on quantum mechanics. The mathematical apparatus of quantum mechanics: textbook]. Magnitogorsk: Izd-vo Magnitogorsk. gos. tekhn. un-ta im. G.I. Nosova, 2014. 188 p.

12. Davydov A.P. *Dokazatel'stvo sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni v ramkakh kvaziklassicheskogo podkhoda opisaniya elektromagnitnykh signalov i izlucheniya* [Proof of the uncertainty relation for energy and time in the quasi-classical approach of describing electromagnetic signals and radiation]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya: materialy XLVII vnutrivuz. nauch. konf. prepodavateley MaGU*. Magnitogorsk: MaGU, 2009, pp. 358–360.

13. Davydov A.P. *O sootnoshenii neopredelennostey dlya energii i vremeni pri kvaziklassicheskom opisanii elektromagnitnogo izlucheniya* [On the uncertainty relation for energy and time in the quasi-classical description of electromagnetic radiation]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy nauki. Tom 1*: *Materialy VII Mezhdunarodnogo simpoziuma*. M.: RAN, 2012, pp. 80–88.

14. Davydov A.P. *Dispersionnaya interpretatsiya sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni i korotkoimpul'snoe lazernoe izluchenie v kvaziklassicheskom podkhode* [Dispersive interpretation of the uncertainties relation for energy and time and the short-impuls laser radiation in the quasi-classical approach]. *Innovatsii v nauke: sbornik statey po mater. XXXII mezhdunar. nauch.-prakt. konf. No 4 (29)*. Novosibirsk: Izd. «SibAK», 2014, pp. 6–14.

15. Davydov A.P. *Dispersionnaya interpretatsiya sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni i korotkoimpul'snoe lazernoe izluchenie* [Dispersive interpetation of energy-time uncertaity relation and quasi-stationary states]. *Vestnik nauki i obrazovanija Severa-Zapada Rossii*. Kaliningrad, 2017. V.3, No.4. Available at: http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2017/12/2017-N4-Davydov.pdf.

16. Davydov A.P. *Dispersionnaya traktovka sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni na primere trekhmernogo volnovogo paketa kvantovoy chastitsy* [Dispersive interpretation of the uncertainty relation for energy and time on the example of three-dimensional wave packet of a quantum particle]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya: mater. dokl. XLVII vnutrivuz. nauch. konf. prepodavateley MaGU*. – Magnitogorsk: MaGU, 2009, pp. 340–344.

17. Davydov A.P. *Ob odnoy realizatsii dispersionnoy interpretatsii sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni* [On one realization of the dispersion interpretation of the uncertainty relation for energy and time]. *Fiziko-matematicheskie nauki i obrazovanie: sbornik trudov uchastnikov Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii.* Magnitogorsk: MaGU, 2012, pp. 107–114.

18. Davydov A.P. *O sootnoshenii neopredelennostey dlya energii i vremeni dlya odnofotonnykh sostoyaniy s gaussovskim impul'snym raspredeleniem* [On the energy-time

uncertainty relation for single-photon states with the gaussian momentum distribution]. *Innovatsii v nauke: sbornik statey po mater. LV mezhdunar. nauch.-prakt. konf. No 3 (52)*. Novosibirsk: Izd. «SibAK», 2016, pp. 115–123.

19. Bor N. *Kvantovyy postulat i noveyshee razvitie atomnoy teorii* [Quantum postulate and the newest development of the atomic theory]. *Izbrannye nauchnye trudy*, V. II. M.: Nauka, 1971. 675 p.

20. Landau L.D., Lifshits E.M. *Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya*. M.: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1963. 702 p.

21. Mandel'shtam L.I., Tam I.E. *Sootnoshenie neopredelennosti energiya-vremya v nerelyativistskoy kvantovoy mekhanike* [The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics]. *Izv. AN SSSR, ser. fizich*., 1945, V. 9, No. 4, pp. 122–128.

22. Matveev A N. *Atomnaya fizika* [*Atomic physics*]. M.: Vysshaya shkola, 1989. 439 p.

23. Davydov A.P. *Obshchee dokazatel'stvo sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni v dispersionnoy traktovke v kvaziklassicheskom i kvantovom sluchayakh* [General proof of the uncertainty relation for energy and time in the dispersion interpretation in the quasi-classical and quantum cases]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya: Mater. dokl. XLVIII vnutrivuz. nauch. konf. prepodavateley MaGU*. Magnitogorsk: MaGU, 2010, pp. 323–325.

24. Davydov A.P. *O dispersionnoy traktovke sootnosheniy neopredelennostey dlya energii i vremeni v kvantovoy mekhanike* [On the dispersion treatment of the uncertainty relations for energy and time in quantum mechanics]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy nauki. T. 2. – Materialy IX Mezhdunarodnogo simpoziuma, posvyashchennogo 90-letiyu so dnya rozhdeniya akademika V.P. Makeeva*. M.: RAN, 2014, pp. 17–24.

25. Davydov A.P. *Strogoe dokazatel'stvo sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni v dukhe dokazatel'stva sootnosheniy neopredelennostey Geyzenberga* [Strict proof of the uncertainty relation for energy and time in the spirit of the proof of Heisenberg's uncertainty relations]. Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya: materialy XLVII vnutrivuz. nauch. konf. prepodavateley MaGU. Magnitogorsk, 2009, pp. 344–346.

26. Davydov A.P. *Operator energii i sootnoshenie neopredelennostey dlya energii i vremeni v kvantovoy mekhanike* [Energy operator and uncertainty relation for energy and time in quantum mechanics]. *Innovatsii v nauke: sbornik. st. po materialam XLIII mezhdunar. nauch.-prakt. konf. № 3 (40)*. Novosibirsk: Izd. «SibAK», 2015, pp. 7–19.

27. Geitler W. *Kvantovaya teoriya izlucheniya* [Quantum Theory of Radiation] Moscow, Leningrad: Gos. izd-vo tekhniko-teor. lit., 1940. 272 p.

28. Butikov E.I. *Optika* [Optics]. M.: Vysshaya shkola, 1986. 512 p.

29. Levich V.G. *Kurs teoreticheskoy fiziki* [The course of theoretical physics]. Moscow: Nauka, 1969. 910 p.

30. Krylov N.S., Fock V.A. O dvukh osnovnykh tolkovaniyakh sootnosheniya neopredelennosti dlya energii i vr emeni [On the two main interpretations of the uncertainty relation for energy and time] *ZhETF*, 1947. V. 17, No. 4, p. 93.

31. Davydov A.S. *Kvantovaya mekhanika* [Quantum mechanics] Moscow: Nauka, 1973. 703 p.

32. Levich V.G., Vdovin Yu.A., Myamlin V.A. *Kurs teoreticheskoy fiziki* [The course of theoretical physics] V.II. Moscow: Nauka, 1971. 936 p.

33. Akhiezer A.I., Berestetskiy V.B. *Kvantovaya elektrodinamika* [Quantum electrodynamics] Moscow: Nauka, 1981. 432 p.

34. Elyutin P.V., Krivchenkov V.D. *Kvantovaya mekhanika* [Quantum mechanics] Moscow: Nauka, 1976. 334 p.

35. Kraynov V.P., Smirnov B.M. *Izluchatel'nye protsessy v atomnoy fizike* [Radiative processes in atomic physics] Moscow: Vysshaya shkola, 1983. 288 p.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Давыдов Александр Петрович
Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Россия, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной и теоретической физики Института естествознания и стандартизации,
E-mail: ap-dav@yandex.ru

Davydov Alexander Petrovich
Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied and Theoretical Physics, Institute of Natural Sciences and Standardization,
E-mail: ap-dav@yandex.ru

Корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с автором статьи:
455008, Челябинская обл., г. Магнитогорск, ул. Зеленый Лог, дом 30, кв. 103.
Давыдов А.П.
8-908-069-79-39