

УДК 519.254

**КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОФАКТОРНЫХ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

И.М. Ахмедов, В.А. Наумов

**CORRELATION ANALYSIS THE RESULTS OF MULTIVARIATE
EXPERIMENTAL RESEARCH**

I.M. Ahmedov, V.A. Naumov

Аннотация. Сформирован массив экспериментальных разных авторов по исследованию гидродинамического сопротивления элементов сетей из синтетических материалов. Наибольший модуль коэффициента парной корреляции у C_x с углом атаки. С тремя факторами получились близкие по модулю коэффициенты корреляции, больше 0,3. Коэффициент множественной корреляции довольно высок и не снижается при уменьшении учитываемых в модели факторов до четырех. При меньшем числе учитываемых факторов индексы нелинейной множественной корреляции повышаются с увеличением их порядка.

Ключевые слова: элементы сетей; гидродинамическое сопротивление; испытания; корреляционный анализ; матрица парной корреляции.

Abstract. Drag of the netting elements made of synthetic materials have been formed. The largest module of the pair correlation coefficient in C_x is an angle of attack. With three factors, the correlation coefficients were similar modulo, greater than 0.3. The multiple coefficient of correlation is quite high and does not decrease when the factors considered in the model are reduced to four. With a smaller number of aggregated factors, the indices of nonlinear multiple correlation increase with their order.

Keywords: elements of netting; hydrodynamic drag; tests; correlation analysis; pair correlation matrix.

Введение

Статистические методы широко используются для планирования экспериментальных исследований, обработки и анализа их результатов (см. [1-3] и библиографию в них). Первые попытки применить вероятностные методы для изучения зависимости коэффициента гидродинамического сопротивления сетей от различных факторов были описаны профессором А.Л. Фридманом. В учебнике [4] в результате графического представления результатов многочисленных испытаний различных сетей и аппроксимации данных опытов была получена эмпирическая зависимость для коэффициента гидродинамического сопротивления плоской сети при поперечном обтекании:

$$C_x = 3 \cdot \left(\frac{2\omega}{Re_d} \right)^{0,07}, \quad Re_d = \frac{V \cdot d}{\nu}, \quad (1)$$

Здесь и далее V – скорость движения; d – диаметр нити; ν – коэффициент кинематической вязкости воды; Re – число Рейнольдса, рассчитанное по диаметру нити; a – шаг ячеек; u_x, u_y – коэффициенты посадки; ω – сплошность сети:

$$\omega \approx \frac{d}{a} \cdot \frac{1}{u_x \cdot u_y}, \quad (2)$$

По тем же экспериментальным данным, что использовались [4], в [5] методом наименьших квадратов была получена эмпирическая зависимость (3), коэффициент и показатель степени которой сильно отличаются от (1):

$$C_x = \beta \cdot \left(\frac{2\omega}{Re_d} \right)^m; \quad \beta = 10,3; \quad m = 0,25. \quad (3)$$

В дальнейшем было установлено, что величина параметров β и m зависит от области гидродинамического сопротивления [6]. В [7] было показано, что причина большого различия коэффициентов (1) и (3) в том, что в [4] процедура осреднения была проведена по всей совокупности результатов испытания сетей, полученных при разных диапазонах аргументов, тогда как ее нужно проводить по *реализациям случайной функции*.

Реальная ситуация намного сложнее, так как коэффициент гидродинамического сопротивления сети зависит не от двух, а от большего числа факторов. На наш взгляд, формирование зависимости должно предусматривать только безразмерные комплексы. Они приведены, например, в [8, 9]. Часть из них показана в формуле (4):

$$C_x = C_x(\alpha, \omega, Re_d, Re_L, \delta, s, Fr, Str, \theta, \xi, \chi, \dots). \quad (4)$$

Здесь и далее, кроме обозначений введенных ранее, α – угол атаки, χ – число наружных прядей каната, ξ – степень турбулентности потока, $Re_L = V \cdot L / \nu$ – число Рейнольдса, рассчитанное по длине сети L ; $\delta = d/L$; $s = H/L$ – характеристика провиса сети (H – хорда с длиной дуги L); Fr , Str – модифицированные числа Фруда и Струхала, соответственно:

$$Fr = \frac{V^2}{(1 - \rho_f / \rho) \cdot d \cdot g}, \quad Str = \frac{d \cdot \theta}{V}, \quad (5)$$

где θ – частота собственных колебаний; ρ – плотность материала сети, ρ_f – плотность воды, g – ускорение свободного падения.

Задача данной статьи – на базе результатов экспериментальных исследований сформировать массив данных о влиянии различных факторов на коэффициент гидродинамического сопротивления элемента сети и выполнить его корреляционный анализ.

Исходные данные

В статье были использованы результаты экспериментальных исследований элементов сетей из синтетических материалов, приведенные в работах [4-6, 9-16]. Было отобрано 9 факторов, значения которых были приведены в публикациях или их можно было восстановить по соответствующим формулам с помощью генератора случайных чисел. Значения всех факторов были приведены к безразмерному виду по формулам:

$$Y = \frac{C_x - C_x^{\min}}{C_x^{\max} - C_x^{\min}}, \quad X_1 = \frac{\alpha - \alpha_{\min}}{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}, \quad X_2 = \frac{\omega - \omega_{\min}}{\omega_{\max} - \omega_{\min}}, \quad X_3 = \frac{Re_d - Re_d^{\min}}{Re_d^{\max} - Re_d^{\min}}, \dots \quad (6)$$

Например, $\alpha_{\min} = 0$, $\alpha_{\max} = \pi/2$.

Часть рассчитанных безразмерных значений факторов приведена в табл. 1. В первой строке табл. 1 показано их соответствие исходным параметрам, по которым они были рассчитаны. Общий объем выборки составил $n = 278$.

Таблица 1 – Безразмерные значения факторов

№ пп	C_x	α	ω	Re_d	Re_L	δ	s	Fr	Str	θ
	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	0.3391	0.2091	0.9210	0.1895	0.8216	0.3767	0.2541	0.9928	0.1286	0.4510
2	0.5929	0.7947	0.7488	0.5736	0.4691	0.7978	0.6201	0.1460	0.6961	0.2665
3	0.3988	0.2815	0.5612	0.0584	0.0027	0.6011	0.6072	0.1356	0.8308	0.8622
4	0.3114	0.5025	0.2138	0.9441	0.6194	0.6007	0.5611	0.5608	0.4122	0.9308
5	0.2575	0.1038	0.8967	0.0451	0.6080	0.3247	0.2610	0.2300	0.8328	0.4620
6	0.6211	0.4763	0.9762	0.9531	0.4682	0.5973	0.9926	0.4253	0.8985	0.4270
7	0.4403	0.5940	0.8866	0.5982	0.0528	0.7183	0.0212	0.9701	0.1278	0.3788
8	0.3703	0.5605	0.0466	0.0624	0.4776	0.5934	0.2346	0.1013	0.4744	0.8683
9	0.2921	0.6007	0.0450	0.7145	0.0077	0.4704	0.3753	0.6392	0.2224	0.2529
10	0.4541	0.6174	0.8227	0.8125	0.2958	0.6994	0.1327	0.3941	0.6121	0.6147
...										
278	0.6381	0.4919	0.9946	0.4985	0.3827	0.2291	0.9943	0.4107	0.2094	0.2592

Коэффициенты корреляции

Сначала были рассчитаны коэффициенты парной корреляции между всеми факторами. Табл. 2 позволяет оценить, насколько стохастическая связь между ними близка к линейной функциональной зависимости. Первая строка табл. 2 показывает такую связь Y и всех факторов.

Таблица 2 – Матрица коэффициентов парной корреляций

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
Y	1	0,774	0,363	-0,315	-0,017	-0,068	0,322	-0,005	0,074	0,012
X_1	0,774	1	-0,028	-0,034	-0,026	-0,031	0,063	0,006	0,064	0,069
X_2	0,363	-0,027	1	-0,044	0,069	-0,130	0,000	0,007	0,112	0,000
X_3	-0,315	-0,034	-0,044	1	-0,005	-0,013	0,051	-0,034	0,001	0,020
X_4	-0,017	0,026	0,069	-0,005	1	0,009	-0,102	-0,007	0,001	-0,013
X_5	-0,068	-0,031	-0,130	-0,013	-0,009	1	-0,055	-0,144	0,011	-0,013
X_6	0,322	0,063	0,000	0,051	-0,102	-0,055	1	-0,013	-0,044	-0,004
X_7	-0,005	-0,006	0,007	-0,034	-0,007	-0,144	-0,013	1	-0,088	-0,009
X_8	0,074	0,064	0,112	0,001	0,001	0,011	-0,044	-0,068	1	0,033
X_9	0,012	0,069	0,000	0,020	-0,013	-0,013	-0,004	-0,009	0,033	1

Близость к нулю коэффициента парной корреляции оценивают по критическому значению [1]:

$$r_{кр} = t_{кр} / \sqrt{t_{кр}^2 + n - 2} = 0,10, \quad (7)$$

где $t_{кр} = 1,65$ найдено по распределению Стьюдента для уровня значимости 0,05 и $(n - 2)$ степеней свободы. Ниже критического значения коэффициенты корреляции Y с факторами X_4, X_5, X_7, X_8, X_9 .

Наибольший коэффициент парной корреляции у Y с первым фактором (X_1 соответствует углу атаки α). С тремя факторами получились близкие по модулю коэффициенты корреляции $X_2 - \omega, X_6 - s, X_3 - Re_d$. Причем, если два первых коэффициента положительные, то последний – отрицательный. Это соответствует их физическому влиянию. Стохастическая связь факторов между собой слабая или вовсе отсутствует.

Найдем коэффициент множественной корреляции между Y и всеми 9-ю факторами по формуле [2]:

$$r_{Y \cdot X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9} = \sqrt{1 - \det(r_{i,j}) / \det(r_{-1,i,j})} = 0,951, \quad (8)$$

где $r_{i,j}$ – матрица коэффициентов парной корреляции (табл. 2), $r_{-1,i,j}$ – подматрица предыдущей, полученная удалением первого столбца и первой строки.

Рассчитываем и помещаем в табл. 3 статье коэффициенты множественной корреляции, последовательно отбрасывая по одному фактору, начиная с X_7 , у которого наименьший модуль коэффициента парной корреляции в первой строке табл. 2. Далее – по возрастанию модуля парной корреляции в первой строке. Коэффициент детерминации получается возведением в квадрат коэффициента множественной корреляции.

Таблица 3 – Коэффициенты множественной корреляции и детерминации

Количество факторов	Факторы	Коэффициент множественной корреляции	Коэффициент детерминации
9	$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_7 X_8 X_9$	0,951	0,905
8	$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_8 X_9$	0,951	0,905
7	$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 X_6 X_8$	0,951	0,904
6	$X_1 X_2 X_3 X_5 X_6 X_8$	0,951	0,904
5	$X_1 X_2 X_3 X_6 X_8$	0,951	0,904
4	$X_1 X_2 X_3 X_6$	0,951	0,904
3	$X_1 X_2 X_6$	0,906	0,822
2	$X_1 X_2$	0,864	0,747
1	X_1	0,774	0,600

Величина коэффициента множественной корреляции близка к единице, причем она не снижается при уменьшении учитываемых в модели факторов до четырех (X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_6). Величина скорректированного коэффициента детерминации, практически, не отличается от величины коэффициента детерминации без корректировки. Коэффициент детерминации, равный 0,904 говорит, что 90,4% вариации зависимой переменной Y объясняется вариацией 4-х факторов линейной модели (X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_6). Остальные 9,6% вариации зависимой переменной объясняются факторами, неучтенными в линейной модели. Линейная модель с указанными четырьмя аргументами учитывает наиболее существенные факторы, определяющие величину коэффициента гидродинамического сопротивления.

82,2% вариации Y объясняется 3-х факторной линейной моделью (X_1 ; X_2 ; X_6). 74,7% вариации Y объясняется 2-х факторной линейной моделью (X_1 ; X_2). 60% вариации Y объясняется изменением всего одного фактора линейной модели (угол атаки), $Y = f(X_1)$.

Индексы нелинейной корреляции и детерминации

Индекс нелинейной множественной корреляции R_k порядка k используют для оценки тесноты нелинейной стохастической связи. При $k = 1$ он совпадает с коэффициентом множественной корреляции. Увеличение k для 4-х факторной модели (X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_6) не приводит к росту R_k по сравнению с коэффициентом множественной корреляции, равным 0,951. Иная ситуация с 3-х и 2-х факторной моделью (см. табл. 4).

Увеличение k от единицы до шести 3-х факторной модели позволяет поднять индекс детерминации с 0,822 до 0,914; 2-х факторной модели – с 0,747 до 0,822, однофакторной модели – незначительно с 0,6 до 0,63. Причем в последнем случае увеличение k больше двух не дает прироста R^2 . Анализ рассчитанных индексов позволяет определить необходимость учета тех или иных факторов в моделях, указать возможные направления совершенствования моделей.

Таблица 4 – Индексы нелинейной множественной корреляции и детерминации

Кол-во факторов	Порядок индекса нелинейной множественной корреляции k									
	2		3		4		5		6	
	R	R^2	R	R^2	R	R^2	R	R^2	R	R^2
3	0,937	0,878	0,940	0,884	0,945	0,892	0,950	0,902	0,956	0,914
2	0,894	0,799	0,900	0,810	0,904	0,817	0,907	0,822	0,907	0,822
1	0,795	0,632	0,794	0,630	0,794	0,630	0,794	0,630	0,794	0,630

Заключение

Был сформирован массив экспериментальных разных авторов по исследованию гидродинамического сопротивления элементов сети из синтетических материалов. Удалось восстановить данные по 9 факторам, все они были приведены к одинаковой безразмерной форме на отрезке $[0; 1]$. Наибольший модуль коэффициента парной корреляции $0,774$ у C_X с углом атаки α . С тремя факторами (ω , s , Re_d) получились близкие по модулю коэффициенты корреляции, большему $0,3$. Стохастическая связь факторов между собой слабая или вовсе отсутствует. Данные выборки не противоречат гипотезе о равенстве нулю коэффициента парной корреляции C_X с Re_L , δ , Fr , Str , θ . Коэффициент множественной корреляции довольно высок $0,951$ и не снижается при уменьшении учитываемых в модели факторов до четырех. При меньшем числе учитываемых факторов индексы нелинейной множественной корреляции повышаются с увеличением их порядка.

Следует уточнить, что результаты данной статьи относятся к обработке результатов массовых измерений, выполненных разными авторами. Не исключено, что при особых условиях проведения экспериментов будет необходимо учитывать некоторые из факторов, которые в исследованном массиве не оказывали заметного влияния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента: справочное руководство. Москва: Наука, 1971. 192 с.
2. Шашков В.Б. Прикладной регрессионный анализ. Многофакторная регрессия. Оренбург: ГОУ ВПО ОГУ, 2003. 363 с.
3. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. Москва: Физматлит, 2006. 816 с.
4. Фридман А.Л. Теория и проектирование орудий промышленного рыболовства: учебник. Москва: Легкая и пищевая промышленность, 1981. 238 с.
5. Великанов Н.Л., Наумов В.А., Кикот А.В., Бояринова Н.А. Методика определения гидродинамического сопротивления плоских элементов рыболовных сетей при поперечном обтекании // Рыбное хозяйство. 2010. № 4. С. 72-75.
6. Наумов В.А., Бояринова Н.А. Эмпирические формулы для коэффициента сопротивления плоских рыболовных сетей при поперечном обтекании // Известия КГТУ. 2012. № 24. С. 143-150.
7. Бояринова Н.А., Кикот А.В., Наумов В.А. Особенности статистической обработки результатов экспериментальных исследований случайной функции, полученных разными авторами // Известия КГТУ. 2015. № 37. С. 199-206.
8. Габрюк В.И., Кулагин В.Д. Механика орудий рыболовства и АРМ промысловика. Москва: Колос, 2000. 416 с.
9. Недоступ А.А. Методы расчета пассивных сетных орудий внутреннего и прибрежного рыболовства: монография. Калининград: Изд-во КГТУ, 2010. 280 с.
10. Наумов В.А. Математическая постановка краевой задачи о равновесии полосы ставного невода // Известия КГТУ. 2013. № 28. С. 182-187.

11. Наумов В.А., Агиевич Н.А. Эмпирическая формула для коэффициента гидродинамического сопротивления плоской рыболовной сети при продольном обтекании в автоматической области Известия КГТУ. 2014. № 32. С. 238-244.
12. Наумов В.А., Ахмедова Н.Р., Ахмедов И.М. Анализ результатов испытания прочности трехрядных канатов из полимерных материалов // Известия КГТУ. 2015. № 36. С. 43-51.
13. Miyazaki Y., Takahashi T. Basic investigations on the resistances of fishing nets. The resistance of plane nets. Journal Tokyo University of Fisheries. 1964. V.50. No 2. pp. 96-103.
14. Imai T., Nakamura T. Fluid dynamical drag coefficient on the weaver's-knot netting relative to Reynolds number. Nippon Suisan Gakkaishi. 1989. No 55. pp. 1753-1757.
15. Yamamoto K., Mukaida Y., Puspito G., Hiraishi T., Nashimoto K. A scale effect evaluated by drag measurement comparisons between prototype plane nets and one-fifth model based on Tauti's law. Fisheries Science. 1996. No 62. pp. 561-565.
16. Lee M.K., Lee C.W., Song D.H. Experiments on hydrodynamic coefficients of netting in relation to mesh grouping. Contributions on the theory of fishing gears and related marine systems. Vol. 5. Proceeding of the 8-th International Workshop on Methods for the development and evaluation of maritime technologies. Germany. Rostock. 2007. pp. 35-44.

REFERENCES

1. Rumshinskiy L.Z. *Matematicheskaya obrabotka rezul'tatov eksperimenta: spravochnoe rukovodstvo* [Mathematical processing of experimental results: reference manual]. Moskva: Nauka Publ., 1971. 192 p.
2. Shashkov V.B. *Prikladnoy regressionnyy analiz. Mnogofaktornaya regressiya: uchebnoe posobie* [Applied regression analysis. Multi-factor regression: tutorial] Orenburg: GOU VPO OSU, 2003. 363 p.
3. Kobzar' A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov* [Applied mathematical statistics. For engineers and researchers] Moscow: Fizmatlit Publ., 2006. 816 p.
4. Fridman A.L. *Teoriya i proektirovanie orudiy promyshlennogo rybolovstva* [Theory and design of guns commercial fishery] Moscow: Light and food industry Publ., 1981. 238 p.
5. Velikanov N.L., Naumov V.A., Kikot A.V., Boyarinova N.A. *Metodika opredeleniya gidrodinamicheskogo soprotivleniya ploskikh elementov rybolovnykh setey pri poperechnom obtekanii* [The method of determining hydrodynamic resistance of flat elements of fishing nets at a cross flow] *Rybnoe khozyaystvo*. 2010. No 4, pp. 72-75.
6. Naumov V.A., Boyarinova N.A. Empiricheskie formuly dlya koeffitsienta soprotivleniya ploskikh rybolovnykh setey pri poperechnom obtekanii [Empirical formula for the drag coefficient of a flat fishing nets at a cross flow] *Izvestiya KGTU*. 2012. No 24, pp. 143-150.
7. Boyarinova N.A., Kikot A.V., Naumov V.A. *Osobennosti statisticheskoy obrabotki rezul'tatov eksperimental'nykh issledovaniy sluchaynoy funktsii, poluchennykh raznymi avtorami* [Features of statistical processing of experimental results on random functions obtained by different authors] *Izvestiya KGTU*. 2015. No 37, pp. 199-206.
8. Gabryuk V.I., Kulagin V.D. *Mekhanika orudiy rybolovstva i ARM promyslovika: uchebnoe posobie* [Mechanics of fishing gears and arm of the fishers: a training manual] Moscow: Kolos, 2000. 416 p.
9. Nedostup A.A. *Metody rascheta passivnykh setnykh orudiy vnutrennego i pribreznogo rybolovstva: monografiya* [Methods for calculating passive netting guns inland and coastal fisheries: monograph] Kaliningrad: Izd-vo KGTU, 2010. 280 p.
10. Naumov V.A. *Matematicheskaya postanovka kraevoy zadachi o ravnovesii poloski stavnogo nevoda* [Mathematical formulation of the boundary value problem on the equilibrium of the strips of stationary netting] *Izvestiya KGTU*. 2013. No 28, pp. 182-187.

11. Naumov V.A., Agievich N.A. *Empiricheskaya formula dlya koeffitsienta gidrodinamicheskogo soprotivleniya ploskoy rybolovnoy seti pri prodol'nom obtekanii v avtomodel'noy oblasti* [The empirical formula for hydrodynamic drag coefficient of flat fishing nets with longitudinal flow in self-similar region] *Izvestiya KGTU*. 2014. No 32, pp. 238-244.
12. Naumov V.A., Akhmedova N.R., Akhmedov I.M. *Analiz rezul'tatov ispytaniya prochnosti trekhpryadnykh kanatov iz polimernykh materialov* [Analysis of the polymeric materials of 3-strand strength ropes testing] *Izvestiya KGTU*. 2015. No 36. pp. 43-51.
13. Miyazaki Y., Takahashi T. Basic investigations on the resistances of fishing nets. The resistance of plane nets. *Journal Tokyo University of Fisheries*. 1964. V.50. No 2. pp. 96-103.
14. Imai T., Nakamura T. Fluid dynamical drag coefficient on the weaver's-knot netting relative to Reynolds number. *Nippon Suisan Gakkaishi*. 1989. No 55, pp. 1753-1757.
15. Yamamoto K., Mukaida Y., Puspito G., Hiraishi T., Nashimoto K. A scale effect evaluated by drag measurement comparisons between prototype plane nets and one-fifth model based on Tauti's law. *Fisheries Science*. 1996. No 62. pp. 561-565.
16. Lee M.K., Lee C.W., Song D.H. Experiments on hydrodynamic coefficients of netting in relation to mesh grouping. Contributions on the theory of fishing gears and related marine systems. Vol. 5. Proceeding of the 8-th International Workshop on Methods for the development and evaluation of maritime technologies. Germany. Rostock. 2007. pp. 35-44.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Ахмедов Исфендияр Махмуд-оглы

Калининградский государственный технический университет, г. Калининград, Россия, аспирант кафедры водных ресурсов и водопользования
E-mail: isfendi@mail.ru

Ahmedov Isfendiar Mahmud-oglu

Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia, The post-graduate student of The Water Resources Department
E-mail: isfendi@mail.ru

Наумов Владимир Аркадьевич

Калининградский государственный технический университет, г. Калининград, Россия, Россия, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой водных ресурсов и водопользования, действительный член Российской инженерной академии, действительный член Российской академии естественных наук,

E-mail: van-old@rambler.ru

Naumov Vladimir Arkad'evich

Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia, Chairman of The Water Resources Department, Doctor of Technical Science, Professor, Member of Russian Engineering Academy, Member of Russian Academy of Natural Science,
E-mail: van-old@rambler.ru

Корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с авторами статьи:
236022, Россия, Калининград, Советский пр., 1, КГТУ, ГУК, каб. 372. Наумов В.А.
8(4012)99-53-37