

УДК 532.529

К УЧЕТУ СИЛЫ СЭФМАНА ПРИ МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ДВИЖЕНИЯ ДИСПЕРСНЫХ ЧАСТИЦ В ЛАМИНАРНОМ СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ

В.А. Наумов

ACCOUNTING FOR THE SAFFMAN FORCE IN MATHEMATICAL MODELING OF THE DISPERSED PARTICLES MOVEMENT IN LAMINAR SHEAR FLOW

V.A. Naumov

Аннотация. При числах Рейнольдса частицы до 0,5 уменьшение величины силы Сэфмана не превышает нескольких процентов. Если числа Рейнольдса частицы стремятся к нулю, то отношение боковой силы Сэфмана к продольной проекции силы гидродинамического сопротивления только увеличивается. Даже при значениях указанного отношения менее 0,02 сила Сэфмана оказывает заметное влияние на траектории движения частиц в ламинарном пограничном слое на пластине. В каждом конкретном случае при малых, но конечных числах Рейнольдса, прежде чем пренебрегать боковой силой Сэфмана, действующей на дисперсные частицы в сдвиговом течении, нужно оценивать ее вклад.

Ключевые слова: дисперсные частицы; сдвиговое течение; сила Сэфмана; числа Рейнольдса; поправочный множитель.

Abstract. At Reynolds numbers of particles up to 0.5 decrease in the magnitude of the Saffman force does not exceed several percent. If the Reynolds number of the particle tend to zero, then the ratio of the lateral Saffman force to the longitudinal projection of the force of hydrodynamic resistance increases. Even if the values of the specified relationship is less than 0.02, the Saffman force has a significant impact on the trajectory of particle motion in a laminar boundary layer on the plate. In each case, at small but finite Reynolds numbers, before neglected side of the Saffman force acting on the dispersed particles in shear flow, we need to assess its contribution.

Keywords: dispersed particles; shear flow; Saffman force; Reynolds number; correction multiplier.

Введение

Двухфазные течения широко используются в технологических аппаратах и энергетических установках. Внимание исследователей, как экспериментаторов, так и теоретиков, к таким течениям последние десятилетия остается неизменно высоким. Общеизвестным считается, что при математическом моделировании течений вязкой среды с дисперсными включениями необходимо, кроме сил тяжести, Архимеда, гидродинамического сопротивления, присоединенных масс, учитывать и боковые силы [1-3]. Причем, для инерционных включений (крупных и с большой плотностью) главную роль играет сила Жуковского-Магнуса, обусловленная вращением частиц. Тогда как при сдвиговом течении для частиц сравнительно малоинерционных преобладает боковая сила Сэфмана (нередко в отечественных изданиях для фамилии «Saffman» используется транслитерация Саффмэн).

Тем не менее, появляются работы (см., например, [4-6]), в которых пренебрегают боковыми силами, действующими на дисперсные включения при наличии градиента скорости несущей среды. Обосновывается это, как правило, малой инерционностью частиц. Действительно, еще в [7] было показано, что при полном пренебрежении инерционными эффектами в задаче обтекания сферы (приближение Стокса) не возникает поперечной силы, действующей на частицу в сдвиговом течении. Однако нужно помнить, что это асимптотическое решение, справедливое при числах Рейнольдса, стремящихся к нулю. В

реальных технологических процессах при ламинарном течении суспензии числа Рейнольдса могут быть малыми, но конечными.

Цель данной статьи проанализировать величину силы Сэфмана, действующую на дисперсные частицы в ламинарном сдвиговом течении при малых, но конечных числах Рейнольдса.

Система уравнений ламинарного двухфазного пограничного слоя

Впервые численные расчеты структуры газодисперсного пограничного слоя на плоской стенке с учетом силы Сэфмана были опубликованы одновременно (в одном журнале!) в работах [8] и [9]. Было показано, что на начальном участке обтекаемой пластины под действием силы Сэфмана частицы оседают на стенку, а ниже по течению траектории частиц направлены в сторону внешнего потока. Были рассчитаны предельные (для равновесной по скоростям фаз области) профили концентрации частиц и показано, что учет силы Сэфмана приводит к уменьшению концентрации частиц в направлении стенки. При этом была использована следующая система безразмерных уравнений, справедливая для достаточно больших значения чисел Рейнольдса течения (не частиц!):

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\rho_p \cdot u_p) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho_p \cdot v_p) = 0, \quad (1)$$

$$u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial \eta} = -\theta \cdot (u_f - u_p) \cdot \alpha \cdot \rho_p + \frac{\partial^2 u_f}{\partial \eta^2}, \quad \alpha = \frac{\rho_{p\infty}}{\rho_f^0} \quad (2)$$

$$u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial \eta} = \theta \cdot (u_f - u_p), \quad (3)$$

$$u_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial v_p}{\partial \eta} = \theta \cdot (v_f - v_p) + b \cdot (u_f - u_p) \cdot \sqrt{\frac{\partial u_f}{\partial \eta}}, \quad (4)$$

$$x = \frac{X}{L}, \quad \eta = \frac{Y\sqrt{\text{Re}_\ell}}{L}, \quad \text{Re}_\ell = \frac{U_\infty \ell}{\nu}, \quad \ell = \frac{U_\infty \delta^2}{18 \cdot \nu \cdot \lambda}, \quad \nu = \frac{V\sqrt{\text{Re}_\ell}}{U_\infty}, \quad u = \frac{U}{U_\infty},$$

$$b = 0,171 \cdot \varphi \cdot \text{Re}_d^{1,5} \cdot (18\lambda)^{-0,25}, \quad \lambda = \rho_f^0 / \rho_p^0, \quad (5)$$

$$|V_R| = \sqrt{(U_f - U_p)^2 + (V_f - V_p)^2}, \quad \text{Re}_d = U_\infty \cdot \delta / \nu.$$

Здесь X, Y – продольная (вдоль пластины) и поперечная координаты, соответственно; U, V – проекции скорости на оси X и Y , соответственно; ν – коэффициент кинематической вязкости несущей среды; ℓ – длина релаксации частицы; ρ^0, ρ – истинная и распределенная плотности фаз, соответственно; λ – отношение истинных плотностей фаз; δ – размер (диаметр) частицы. Индекс f относится к параметрам несущей фазы, p – дисперсной; ∞ – вдали от пластины. Функция отклонения силы гидродинамического сопротивления сферической частицы от линейной зависимости в диапазоне $\text{Re}_p < 1000$ может быть рассчитана по формуле [2]:

$$\theta = 1 + 0,15 \text{Re}_p^{0,687}, \quad \text{Re}_p = |V_R| \cdot \delta / \nu. \quad (6)$$

Поправочный коэффициент к величине силы Сэфмана в [8, 9] $\varphi = 1$. В качестве граничных условий для составляющих скорости несущей фазы принимались профили Блазиуса, а для концентрации и продольной скорости частиц – прямоугольный профиль, поперечная скорость дисперсной фазы в исходном сечении полагалась равной нулю.

В [10] решена аналогичная задача для неизотермического течения в двухфазном пограничном слое. В [11] исследован сдвиг частиц с поверхности плоской пластины. В [12] выполнен расчет движения дисперсных частиц в слое Куэтта с учетом силы Сэфмана.

В [13] экспериментально исследовалось течение суспензии вдоль горизонтальной пластины, плотности жидкой и твердой фаз имели одинаковый порядок. Опыты показали, что вблизи стенки концентрация частиц уменьшается. Для описания результатов этого эксперимента в [14] была предложена модифицированная математическая модель ламинарного пограничного слоя суспензии, в которой в межфазном обмене импульсом, помимо указанных в системе уравнений (1)-(4), учитывались также силы тяжести, Архимеда, присоединенных масс и Бассэ-Буссинеска.

На рис. 1-2 представлены некоторые результаты расчета [14]. По рис. 1 видно, что на начальном участке частицы движутся от стенки, так как их движение определяется действием подъемной силы; в дальнейшем под действием силы тяжести частицы меняют направление движения и осаждаются на стенку. Заметим, что в [14] не учитывалось обратное влияние дисперсной примеси на несущую фазу, поэтому на рис. 2 только один профиль продольной скорости жидкости, соответствующий решению Блазиуса.

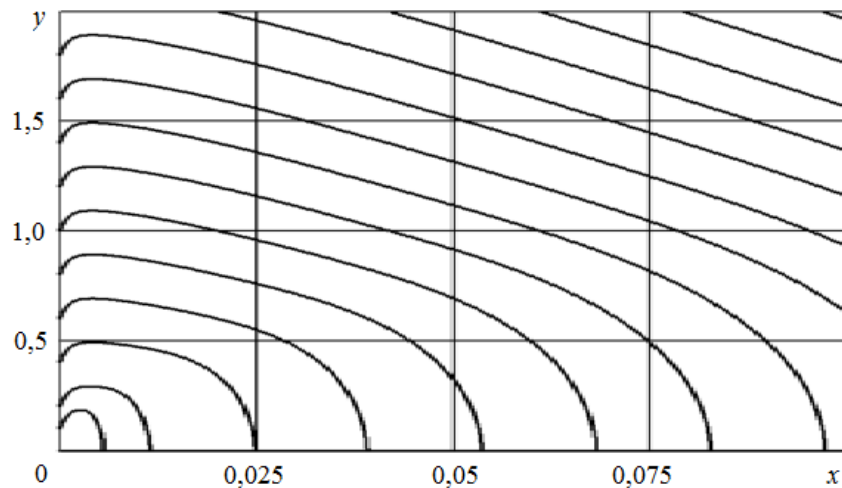


Рисунок 1 – Траектории частиц диаметром 100 мкм при $Re_d = 100$; $\alpha = 0,77$

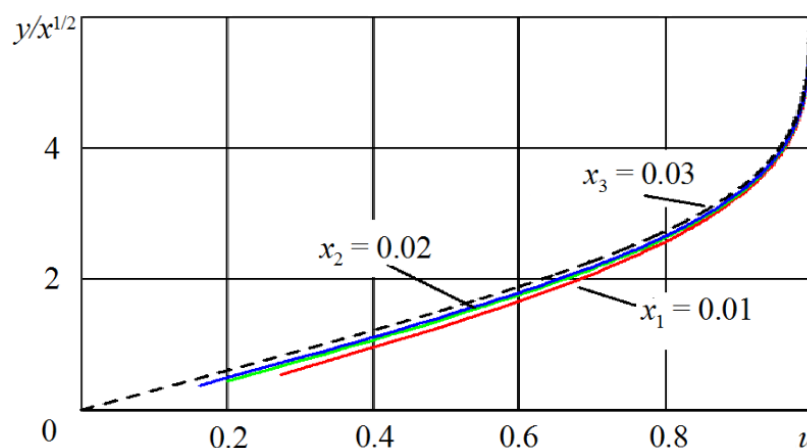


Рисунок 2 – Поперечные профили продольной скорости: сплошные линии – дисперсной фазы в указанных сечениях, штриховая – несущей фазы. Условия течения, как на рис. 1

Поправочный коэффициент к боковой силе Сэфмана

Классическая формула для силы, действующей на сферическую частицу при линейном профиле скорости несущей среды, получена Сэфманом [15]:

$$F_{Saf} = C_{Saf} \frac{\delta^2}{8} \rho_f^o \cdot (U_f - U_p) \cdot \left(\nu \frac{\partial U_f}{\partial Y} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Анализ Сэфмана был ограничен условиями малости чисел Рейнольдса (8). При их выполнении $C_{Saf} = C_{Saf}^o = 6,46$.

$$Re_p \ll 1; Re_\omega \ll 1; Re_g = \frac{\delta^2}{\nu} \left| \frac{\partial U_f}{\partial Y} \right| \ll 1; A = \frac{Re_p}{Re_g^{1/2}} \ll 1. \quad (8)$$

Для учета влияния конечных значений чисел Рейнольдса, величины A и безразмерного расстояния до твердой поверхности вводят поправочную функцию φ :

$$C_{Saf} = C_{Saf}^o \cdot \varphi(Re_p, Re_g, A, \bar{y}). \quad (9)$$

Наиболее удачным выражением, обобщающим формулу Сэфмана на случай конечных чисел Рейнольдса обтекания частицы, считается (10)-(11) [16]. Влияние других факторов здесь не рассматривается.

$$\varphi = 0,4687 \cdot (1 - \exp(-0,1 \cdot Re_p)) \cdot \sqrt{Re_g / Re_p} + \exp(-0,1 \cdot Re_p), \quad Re_p < 40, \quad (10)$$

$$\varphi = 0,0741 \cdot \sqrt{Re_g}, \quad Re_p \geq 40. \quad (11)$$

Число Рейнольдса $Re_p \geq 40$ перестает влиять на силу Сэфмана. В данной статье рассматривается случай малых, но конечных чисел Рейнольдса, поэтому далее ограничиваемся использованием формулы (10).

Продольная проекция силы гидродинамического сопротивления, действующая на сферическую частицу:

$$F_{\mu X} = 3 \cdot \pi \cdot \delta \cdot \rho_f^o \cdot (U_f - U_p) \cdot \theta. \quad (12)$$

Найдем отношение силы Сэфмана к продольной проекции силы гидродинамического сопротивления с учетом формул (6) и (10):

$$K_S = 0,171 \cdot \varphi \cdot \sqrt{Re_g} / \theta. \quad (13)$$

На рис. 3 показана зависимость отношения (13) от чисел Рейнольдса. Видно, что отношение может составлять от 2 до 16% при различных числах Рейнольдса. Причем при $Re_p \rightarrow 0$ оно только увеличивается.

На рис. 4 представлена зависимость поправочного множителя силы Сэфмана от чисел Рейнольдса. Видно, что при увеличении Re_p до трех поправочный множитель уменьшается на 20-25 % в зависимости от значения безразмерного сдвига. Если $Re_p < 0,5$, то это уменьшение всего несколько процентов.

Проверим, может ли сила Сэфмана, величина которой составляет всего 2% от продольной проекции силы гидродинамического сопротивления оказать заметное влияние на динамику дисперсных частиц в ламинарном пограничном слое. Для этого воспользуемся результатами работы [14], в которой $L = 244$ см, $\delta = 100$ мкм, $U_\infty = 50$ см/с. Рассчитаем величины $\ell \approx 5 \cdot 10^{-4}$ м; $Re_\ell \approx 25$. По рис. 2 в сечении $x = 0,01$ оценим числа Рейнольдса:

$$Re_p = 1 \div 5 ; Re_g = 0,01 \div 0,03 .$$

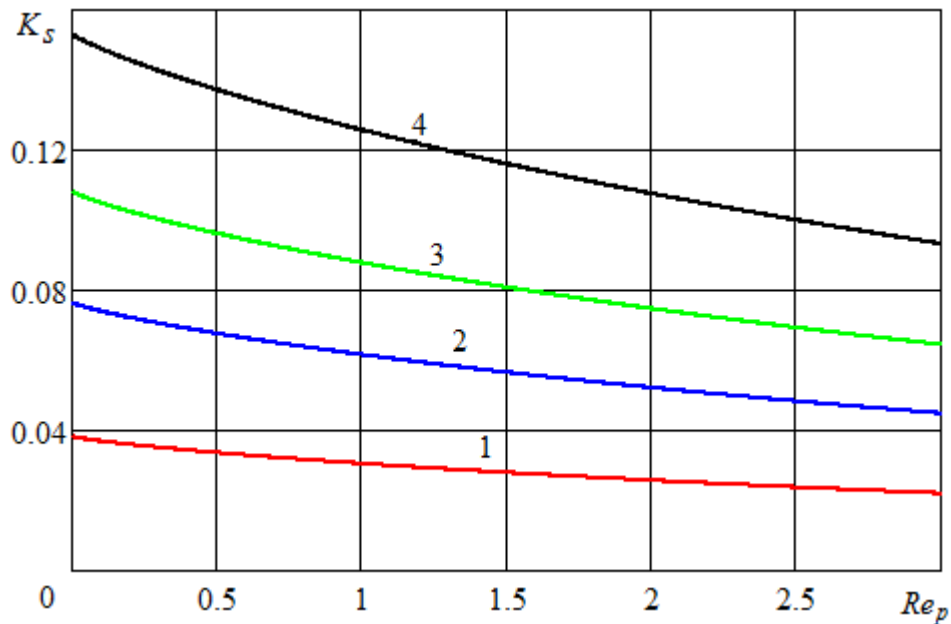


Рисунок 3 – Отношение боковой силы Сэфмана к продольной проекции силы гидродинамического сопротивления частицы при различных значениях Re_g :
1 – $Re_g = 0,05$; 2 – $Re_g = 0,2$; 3 – $Re_g = 0,4$; 4 – $Re_g = 0,8$

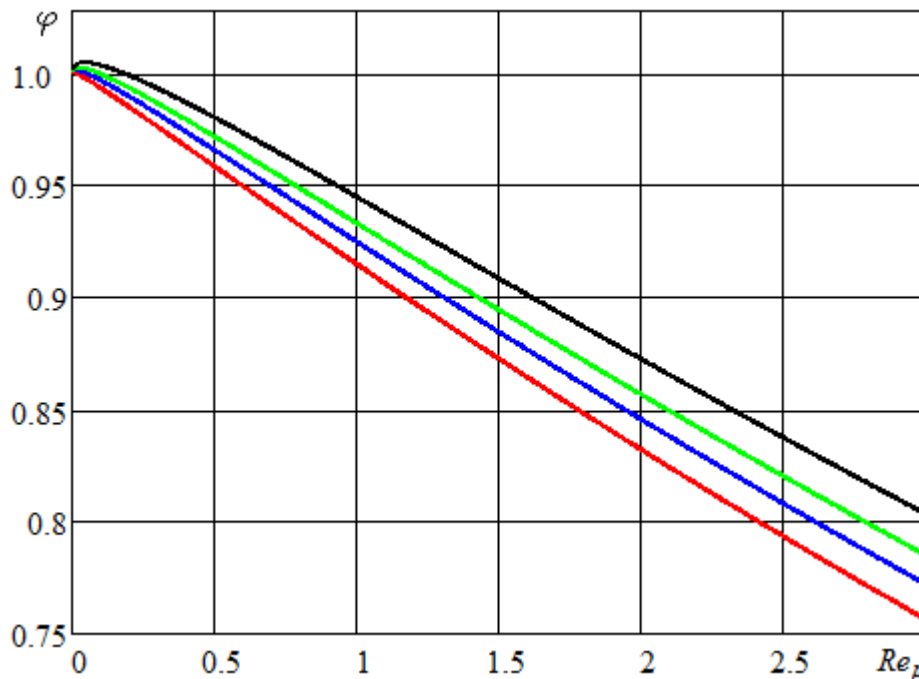


Рисунок 4 – Зависимость поправочного множителя от числа Рейнольдса.
Обозначения, как на рис. 3

Полученные значения чисел Рейнольдса согласно рисунку 3 соответствуют области, в которой $K_S < 0,02$. Однако анализ рис. 1 из [14] показал, что сила Сэфмана заметно влияет на траектории движения частиц, особенно в начальной области ламинарного пограничного слоя на плоской пластине.

Заключение

При числах Рейнольдса частицы до 0,5 уменьшение величины силы Сэфмана не превышает нескольких процентов. Если $Re_p \rightarrow 0$, то отношение боковой силы Сэфмана к продольной проекции силы гидродинамического сопротивления частицы только увеличивается. Даже при значениях указанного отношения менее 0,02 сила Сэфмана оказывает заметное влияние на траектории движения частиц в ламинарном пограничном слое на пластине. В каждом конкретном случае при малых, но конечных числах Рейнольдса, прежде чем пренебрегать боковой силой Сэфмана, действующей на дисперсные частицы в сдвиговом течении, нужно оценивать ее вклад.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shraiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P. Turbulent flows in gas suspensions. New York, Hemisphere Corporation, 1990. 242 p.
2. Crowe C.T., Sommerfeld M., Tsuji Y. Multiphase flows with droplets and particles. Florida, CRC Press, 1998. 471 p.
3. Волков К.Н., Емельянов В.Н. Течения газа с частицами. М.: Физматлит, 2008. 600 с.
4. Дерябина М.С. Модель фильтрации вязкой жидкости через периодическую решетку частиц с заданным градиентом давления // Вестник Югорского государственного университета. 2009. Вып. 2 (13). С. 37–44.
5. Федосеев В.Б. Поведение тела, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, в плоском потоке Куэтта и Пуазейля // Журнал технической физики. 2015. Т. 85. Вып. 4. С. 13-19.
6. Федосеев В.Б. Стратификация двухфазной монодисперсной системы в плоском ламинарном потоке // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2016. Т. 149, Вып. 5. С. 1057–1067.
7. Bretherton F. P. The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number // Journal Fluid Mechanics. 1962. V. 14. No. 2. P. 284–304.
8. Осипцов А.Н. Движение запыленного газа в начальном участке плоского канала и круглой трубы // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 6. С. 80–87.
9. Наумов В.А. Расчет газодисперсного ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1988. № 6. С. 171–173.
10. Наумов В.А. Расчет неизотермического ламинарного пограничного слоя на пластине с учетом подъемных сил, действующих на дисперсную примесь // Теплофизика высоких температур. 1990. Т. 28. № 4. С. 814–816.
11. Наумов В.А. Ламинарный пограничный слой с дисперсной примесью, уносимой с поверхности // Инженерно-физический журнал, 1992. Т. 63, № 2. С. 189-193.
12. Наумов В.А. Влияние подъемной силы Саффмана на движение частицы в слое Куэтта // Инженерно-физический журнал, 1995. Т. 68, № 5. С. 840-844.
13. Lee S.L. Aspects of suspension shear flows // Advances in Applied Mechanics. 1982. V. 22. P. 1–65.
14. Рыбдылова О.Д. Поперечная миграция частиц в пограничном слое на плоской пластине // Наука и образование: Электронное научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. № 2. С. 41. Режим доступа: <http://old.technomag.edu.ru/doc/318597.html>.
15. Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow // Journal Fluid Mechanics. 1965. V. 22. No 2. P. 385–400. Corrigendum // Journal Fluid Mechanics. 1968. V. 31. P. 624.

16. Mei R. An approximate expression for the shear lift force at finite Reynolds number // *International Journal Multiphase Flow*. 1992. V. 18. No 1. P. 145–147.

REFERENCES

1. Shraiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P. Turbulent flows in gas suspensions. New York, Hemisphere Corporation, 1990. 242 p.
2. Crowe C.T., Sommerfeld M., Tsuji Y. Multiphase flows with droplets and particles. Florida, CRC Press, 1998. 471 p.
3. Volkov K.N., Emel'yanov V.N. *Techeniya gaza s chastitsami* [Gas flows with particles]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 600 p.
4. Deryabina M.S. *Model' fil'tratsii vyazkoy zhidkosti cherez periodicheskuyu reshetku chastits s zadannym gradientom davleniya* [Model for filtration of a viscous fluid through a periodic lattice of particles with a given pressure gradient]. *Vestnik Yugorskogo gosudarstvennogo universiteta*. 2009. No 2 (13), pp. 37–44.
5. Fedoseev V.B. *Povedenie tela, imeyushchego formu pryamougol'nogo parallelepipeda, v ploskom potoke Kuetta i Puazeylya* [Behavior of the body, having the shape of a rectangular parallelepiped, a flat flow Couette flow and Poiseuille's]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 2015. V. 85. No 4, pp. 13-19.
6. Fedoseev V.B. *Stratifikatsiya dvukhfaznoy monodispersnoy sistemy v ploskom laminarnom potoke* [Stratification of two-phase monodisperse system in a flat laminar flow]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki*. 2016. V. 149, No 5, pp. 1057–1067.
7. Bretherton F. P. The motion of rigid particles in a shear flow at low Reynolds number // *Journal Fluid Mechanics*. 1962. V. 14. No. 2, pp. 284–304.
8. Osiptsov A.N. *Dvizhenie zapylennogo gaza v nachal'nom uchastke ploskogo kanala i krugloy trubyy* [The motion of dusty gas in the initial section of a plane channel and a round pipe]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 1988. No 6, pp. 80–87.
9. Naumov V.A. *Raschet gazodispersnogo laminarnogo pogranchnogo sloya na plastine s uchetom pod'emnykh sil, deystvuyushchikh na dispersnyuyu primes'* [Calculation of the laminar boundary layer on a plate with allowance for the lifting forces acting on a dispersed mixture]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 1988. No 6, pp. 171–173.
10. Naumov V.A. *Raschet neizotermicheskogo laminarnogo pogranchnogo sloya na plastine s uchetom pod'emnykh sil, deystvuyushchikh na dispersnyuyu primes'* [Calculation of non-isothermal laminar boundary layer on a flat plate subject to lifting forces acting on the dispersed admixture]. *Teplofizika vysokikh temperatur*. 1990. V. 28. No 4, pp. 814–816.
11. Naumov V.A. *Laminarnyy pogranchnyy sloy s dispersnoy primes'yu, unosimoy s poverkhnosti* [Laminar boundary layer with dispersed mixed, entrained from the surface]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1992. V. 63, No 2, pp. 189-193.
12. Naumov V.A. *Vliyanie pod'emnoy sily Saffmena na dvizhenie chastitsy v sloe Kuetta* [Influence of Saffman's lift force on the motion of a particle in a Couette layer]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*, 1995. V. 68, No 5, pp. 840-844.
13. Lee S.L. Aspects of suspension shear flows. *Advances in Applied Mechanics*. 1982. V. 22, pp. 1–65.
14. Rybdylova O.D. *Poperechnaya migratsiya chastits v pogranchnom sloe na ploskoy plastine* [Lateral migration of particles in the boundary layer on a flat plate]. *Nauka i obrazovanie: Elektronnoe nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana*. 2012. No 2, p. 41. Available at: <http://old.technomag.edu.ru/doc/318597.html>.
15. Saffman P.G. The lift on a small sphere in a slow shear flow. *Journal Fluid Mechanics*. 1965. V. 22. No 2, pp. 385–400. Corrigendum. *Journal Fluid Mechanics*. 1968. V. 31, p. 624.



16. Mei R. An approximate expression for the shear lift force at finite Reynolds number. *International Journal Multiphase Flow*. 1992. V. 18. No 1, pp. 145–147.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Наумов Владимир Аркадьевич

Калининградский государственный технический университет, г. Калининград, Россия, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой водных ресурсов и водопользования, действительный член Российской инженерной академии, действительный член Российской академии естественных наук,

E-mail: van-old@rambler.ru

Naumov Vladimir Arkad'evich

Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia, Chairman of The Water Resources Department, Doctor of Technical Science, Professor, Member of Russian Engineering Academy, Member of Russian Academy of Natural Science,

E-mail: van-old@rambler.ru

Корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с автором статьи:
236022, Россия, Калининград, Советский пр., 1, КГТУ, ГУК, каб. 372. Наумов В.А.
8(4012)99-53-37