Вестник науки и образования Северо-Запада России, 2017, Т.3, №4
ISSN 2413–9858

УДК 530.145 + 535(13:14)

ДИСПЕРСИОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СООТНОШЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ДЛЯ ЭНЕРГИИ И ВРЕМЕНИ И КОРОТКОИМПУЛЬСНОЕ ЛАЗЕРНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

А.П. Давыдов

DISPERSION INTERPETATION OF ENERGY-TIME UNCERTAITY RELATION AND SHOT-TIME IMPULSE LASER RADIATION

A.P. Davydov

Аннотация. Для иллюстрации «дисперсионной» трактовки соотношения неопределенностей для энергии и времени рассмотрено короткоимпульсное лазерное излучение с позиций классической электродинамики и «квазиклассического» подхода. Уточняются критерии длительности излучения и ее связь со среднеквадратичным отклонением момента времени наступления соответствующего квантового перехода. Обращается внимание, что при анализе некоторых явлений существенную роль могут сыграть виртуальные отрицательные частоты и энергии, проявив себя на опыте вполне реально. Подчеркивается, что применение дисперсионной трактовки соотношения неопределенностей для энергии и времени к короткоимпульсному лазерному излучению имеет не только теоретический, но и практический интерес, поскольку более точное знание взаимосвязи характеристик излучения позволяет полнее реализовать технологические особенности лазеров, в том числе при их конструировании.

Ключевые слова: *электромагнитное излучение; фотон; виртуальные отрицательные энергии; квантовая механика; волновая функция; квазиклассическое приближение; плотность вероятности.*

Abstract. For illustration of «dispersion» interpretation of energy-time uncertainty relation the short-time impulse laser radiation is discussed from the points of view of classical electrodynamics and quasi-classical approach. The criterions of radiation duration are précised, and also its connection with root-mean-square deviation of time moment of corresponding transition coming. It’s proved, that in the negative frequencies and energies are able to play the essential role and thus to display themselves as if really in experience. Attention is paid that in the analysis of some phenomena the virtual negative frequencies and energies can play an essential role having proved itself in practice quite realistically. It is emphasized that the application of the dispersion interpretation of the uncertainty relation for energy and time to short-pulsed laser radiation is not only of theoretical but also of practical interest, since a more accurate knowledge of the relationship between radiation characteristics makes it possible to more fully realize the technological features of lasers, including when designing them.

Key words: *electromagnetic radiation; photon, virtual negative energies; quantum mechanics; wave function; quasi-classical approximation; probability density.*

Введение

В [1–7], исходя из общих квантовомеханических соображений, была предложена так называемая «дисперсионная» интерпретация соотношения неопределенностей для энергии и времени. Ее идея и необходимость возникли в ходе исследования эволюции в пространстве и во времени волновых пакетов, описывающих распространение свободного фотона. Сам по себе соответствующий волновой пакет конструируется (см. [8–10]) из бивекторов, собственных для операторов энергии, импульса и спиральности, и представляет собой одночастичную волновую функцию фотона в координатном представлении с ее

ISSN 2413–9858

традиционной для квантовой механики интерпретацией: с помощью этой волновой функции можно предсказать плотность вероятности *обнаружить* фотон в заданной точке конфигурационного пространства (при этом, конечно, никакой локализации фотона не подразумевается).

При адекватном к реальному излучению моделировании эволюции волновых пакетов, *когда одним из исходных параметров является время излучения волнового пакета*, требуется, по возможности, более точно находить связи между величинами из соотношения неопределенностей для энергии и времени. По мере изучения этой возможности была сформулирована [1–7] и из общих положений квантовой механики и на конкретных примерах обоснована «дисперсионная» трактовка соотношения неопределенностей для энергии и времени. При этом выяснилось, что *для более корректного* применения этого соотношения с указанной целью, нужно, анализируя истоки его возникновения в квантовой механике, учитывать механизм излучения и связанный с ним физический смысл временного параметра τ данного соотношения.

В [1] эти и сопутствующие вопросы были рассмотрены по отношению к распаду квазистационарных состояний, таких как распад ядра или излучение атома. Рассмотрение проводилось с точки зрения трех подходов: классического, квантового и сформулированного в [1–7] «квазиклассического».

В данной статье эти же вопросы рассматриваются, в основном, по отношению к лазерному излучению, состоящему из коротких импульсов. *Цель статьи* – проиллюстрировать «дисперсионную» интерпретацию соотношения неопределенностей для энергии и времени на примере лазерного излучения и, таким образом, сформулировать критерии того, как более точно можно использовать это соотношение для оценки *ширины линии излучения*, если задается время излучения одного лазерного импульса.

1. О возможности дисперсионной интерпретации соотношения неопределенностей для энергии и времени из общих положений квантовой механики

Если изначально *неизвестна* ширина Γ_ν, Γ_λ, Γ_E линии излучения по какой-либо шкале – соответственно, частоты, длины волны, энергии, и вместо них задается некий временной параметр τ, скажем, время излучения одного лазерного импульса, среднее время жизни излучающей системы и т. п., то Γ_E можно оценить из соотношения

$$\Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2\,. \qquad (1)$$

Выполняя необходимую оценку, в этом неравенстве переходят к приближенному знаку равенства, считая, что соответствующее состояние излучающей системы является «чисто» квантовым. Само по себе это предположение – еще не факт, и его требуется, вообще-то, обосновывать. Но обычно, опуская этот этап и ссылаясь на (1) как на общее квантовомеханическое соотношение, проставляют в нем знак «$\approx$» вместо «$\geq$» и заменяют неопределенность энергии ΔE величиной $\Gamma_E/2$, имеющей, кстати, трактовку, *часто не совпадающую со среднеквадратичным отклонением*, которое, к примеру, для *лоренцева распределения* равно бесконечности. Или устраняют 1/2 в правой части (1) «менее законным» образом, аргументируя это тем, что в эксперименте измеряется не сама энергия данного состояния, а разность энергий при переходе системы из одного состояния в другое (см., например, [11], с. 119). Хотя это и так, но часто энергия конечного состояния вообще не имеет разброса, так что такое объяснение не всегда уместно. Наконец, Δt в (1) заменяют любой «подвернувшей под руку» величиной.

В результате, если в качестве «первоисточника» соотношения неопределенностей используется неравенство (1), то в наиболее употребительной форме из (1) «вытекает» приближенное равенство

$$\Gamma_E \tau \approx \hbar \,, \tag{2}$$

где под τ понимается любая «подходящая» величина, в том числе и «время излучения», интерпретируемое как с классической точки зрения, так и с квантовой.

Однако, *по отношению к лазерному излучению*, соотношение (2), если оно применяется для практических оценок, *следует уточнить*. Действительно, если под τ понимать время излучения одного лазерного импульса и обозначить его как τ_{rad}, то с учетом (1), «уточненное неравенство» должно иметь вид

$$\Gamma_E \tau_{rad} \geq 2\hbar \,, \tag{3}$$

поскольку для лазерных импульсов должно иметь место примерное равенство

$$\Delta t \approx \tau_{rad} / 2 \,. \tag{4}$$

Если теперь в (3) также проставить знак «$\approx$», то получится соотношение

$$\Gamma_E \tau_{rad} \approx 2\hbar \,, \tag{5}$$

в котором правая часть в 2 раза больше, чем в (2), хотя все величины как будто одинаковы по смыслу.

Проистекает это из-за того, что при переходе от (1) к (2) или (3) все-таки не в полной мере анализируется тот смысл, который вкладывается в параметр τ, причем, главным образом, – по той причине, что в (1) не используется возможность интерпретации величины Δt как *среднего квадратичного отклонения момента времени* наступления соответствующего характерного события, например, излучения фотона или распада квазистационарного состояния квантовой системы.

Проясним сначала эту «запутанную» ситуацию, используя результаты [1–4].

С одной стороны, хотя имеются оригинальные способы [12–17] получения соотношения неопределенностей для энергии и времени для некоторых частных случаев, все же, наиболее «быстро» это соотношение, *причем именно в виде* (1), вытекает «автоматически» из коммутационного соотношения $\left[i\hbar\partial/\partial t, t\right] = i\hbar$ между «операторами» энергии и времени, из которого оно, так сказать, сразу и «следует».

Но в таком случае величины ΔE и Δt в (1) должны означать *среднеквадратичные отклонения* энергии системы и момента времени ее соответствующего перехода.

С другой стороны, очевидно, доказательство соотношения (1) нельзя провести по аналогии с тем строгим доказательством, которое существует в квантовой механике для соотношений неопределенностей Гейзенберга [16] при использовании соответствующих коммутаторов для операторов координат частицы и ее проекций импульса, а также, если опираться только на скалярное произведение в «чисто» координатном или «чисто» импульсном пространстве, без учета интегрирования по времени. Так что на самом деле соотношение (1) «вытекает» из коммутатора $\left[i\hbar\,\partial/\partial t,\, t\right] = i\hbar$ чисто формально. Несмотря на это, эвристический дух такого «вывода» наталкивает на саму возможность придать соотношению (1) еще и «дисперсионную» трактовку (см. [1–7]). В [4], однако, соотношение (1) доказано исчерпывающим образом, путем введения в рассмотрения оператора времени и энергии в объединенном пространственно-временном представлении.

Тем не менее, «дисперсионная» трактовка в литературе встречается крайне редко. Ее обоснованию посвящены статьи [1–7]; некоторые аспекты также будут затронуты ниже.

Как известно, квантовые переходы совершаются вероятностно-статистическим путем, при котором *момент времени* t *перехода является случайной величиной*. Поэтому если бы этот момент измерялся, то для характеристики перехода, кроме *его вероятности в единицу времени*, необходимо было бы рассматривать и *дисперсию* D_t *момента* t этого перехода. Разумеется, после каждого перехода и измерения момента t, систему для «наблюдения» повторного перехода нужно снова возвращать в исходное состояние или, если это невозможно, воссоздавать новую такую же систему в том же самом начальном состоянии.

Таким образом, мы видим, что дисперсия момента времени какого-нибудь события в кантовой системе не такая уж и «эфемерная» величина. Она вполне определяема и может быть востребована. В аппарат квантовой механики, поэтому, необходимо было бы включить оператор времени. Возможность этого в литературе рассматривалась; в [4], в частности, с этой точки зрения и было чисто теоретически получено неравенство (1).

Однако наблюдать за *одной отдельно взятой квантовой системой*, например, атомом или ядром, и ее переходами в другие состояния технически чрезвычайно сложно. Поэтому реально наблюдение обычно осуществляется сразу за *статистическим ансамблем* из большого числа тождественных (*невзаимодействующих*) систем, находящихся в одинаковых «макроскопических» условиях. Так, вероятность распада ядра в единицу времени и его среднее время жизни измеряется по количеству зарегистрированных распадов ядер, находящихся в достаточно большом количестве радиоактивного препарата.

Как показывает опыт, результаты многократных наблюдений «над одной квантовой системой», из которых следует проявление ее «*индивидуальных*» волновых свойств, *эквивалентны* результатам наблюдений *сразу над статистическим ансамблем* тождественных систем. Эта *эквивалентность*, как известно, означает, что волновая функция должна относиться к «чистому» состоянию *одной индивидуальной* частицы (или системе), а *не к статистическому ансамблю* частиц (или систем).

Но эта же *эквивалентность* и означает, что вместо того чтобы *многократно* повторять наблюдения «над одной и той же квантовой системой» можно *всего один раз в* интересующий нас момент t провести наблюдение сразу над статистическим ансамблем систем, находящихся в одинаковых макроскопических и микроскопических условиях в течение всего времени от момента $t = 0$ до момента t.

Таким образом, *способы получения информации* при измерении путем многократных наблюдений над одной системой и единовременным наблюдением сразу над ансамблем систем вполне *эквивалентны*.

Этим выводом мы и воспользуемся. *Но при этом несколько сместим акценты.*

Насколько нам известно, даже в опытах «над одной частицей» никогда не измерялись *сами моменты времени* каких-либо событий, характеризующих соответствующую *функцию распределения вероятностей моментов времени наступления этих событий*. Опыты же «над статистическим ансамблем» вообще обычно проводятся в стационарных условиях (например, рассеяние частиц на определенной мишени).

Поэтому в эксперименте *подобного рода функции распределения вероятностей*, по-видимому, *напрямую* и в рамках данного контекста не измерялись; не придавалось им и важного некоторого значения.

Следовательно, единственными пока *уже проведенными* экспериментами, из которых можно извлечь информацию о *функции распределения вероятностей моментов времени*, являются эксперименты по измерению количества распадов квазистационарных состояний, произошедших к заданному моменту времени t, в частности, проведенные измерения, связанные с определением периодов полураспада ядер.

Рассмотрим этот пример с общей позиции квазистационарных процессов и используем полученные результаты для короткоимпульсного лазерного излучения.

2. Квазистационарные процессы и соотношение неопределенностей для энергии и времени

Плотность вероятности попадания момента времени t распада определенной квазистационарной системы в интервал $(t,\ t+dt)$ легко можно ввести на примере радиоактивного распада ядер:

$$f(t) \equiv \frac{dW_{dec}(t)}{dt} = \lambda\, W_{live}(t) = \lambda\left[1 - W_{dec}(t)\right] = \lambda \exp(-\lambda\, t), \tag{6}$$

где λ – не зависящая от времени вероятность распада одного ядра в единицу времени; $W_{dec}(t)$ – вероятность его распада к моменту t, $W_{live}(t)$ – вероятность того, что к моменту t оно еще останется «живым».

Функцию распределения вероятностей $W_{dec}(t)$ можно представить как интеграл от плотности $f(t)$ вероятности $dW_{dec}(t)$ того, что ядро распадется в интервале $(t,\ t+dt)$:

$$W_{dec}(t) = \int_0^t dW_{dec}(t) \equiv \int_0^t f(t)\,dt = \int_0^t \frac{dW_{dec}(t)}{dt}\,dt = \int_0^t \lambda \exp(-\lambda\, t)\,dt = 1 - \exp(-\lambda\, t). \tag{7}$$

Зная $f(t)$ или $W_{live}(t)$, можно непосредственно вычислить тот «*средний момент времени перехода*», которому почему-то было отказано, как понятию, в [11], с. 119, а именно:

$$\tau = \bar{t} = \int_0^\infty t\, f(t)\,dt = \int_0^\infty W_{live}(t)\,dt = \frac{1}{\lambda}, \tag{8}$$

где $\tau = \bar{t}$, стало быть, в случае распада ядра означает еще и его среднее время жизни.

Очевидно, теперь, в рамках «дисперсионной» интерпретации, средний момент времени $\bar{t}$ уже не только имеет право на существование, но и *представляет собой центральное понятие*.

Аналогично вычисляется *средний квадрат момента времени* распада ядер:

$$\overline{t^2} = \int_0^\infty t^2 f(t)\,dt = 2\int_0^\infty t\, W_{live}(t)\,dt = \frac{2}{\lambda^2} = 2\tau^2. \tag{9}$$

Тогда *дисперсия* и *среднеквадратичное отклонение* Δt моментов времени t распадов равны

$$D_t = \overline{t^2} - \bar{t}^2 = \frac{1}{\lambda^2} = \tau^2, \qquad \Delta t = \sqrt{D_t} = \tau = 1/\lambda = 1/\Gamma_\omega = \hbar/\Gamma_E, \tag{10}$$

где равенство $\lambda = \Gamma_\omega$ выше не упоминалось, но хорошо известно, например, для лоренцева распределения частот в естественной ширине спектральной линии излучения атомов, находящихся в возбужденном состоянии, а потому - квазистационарном. Из (10) следует, что *среднеквадратичное отклонение* Δt оказывается равным среднему времени жизни ядра τ.

Это также означает, что переход от общего неравенства (1) к приближенному оценочному равенству (2) *для квазистационарных систем и процессов их распада или излучения* в части замены Δt на τ сделан верно, что и оправдывает само по себе широко используемое на практике равенство (2).

ISSN 2413–9858

Однако замена ΔE на $\Gamma_E/2$ при переходе от (1) к (2) в случае распада квазистационарных состояний невозможна. Действительно, характерным распределением энергии в этих состояниях является лоренцево распределение, среднеквадратичное значение энергии для которого равно бесконечности. Приведем основные окончательные выводы из подробного рассмотрения этого вопроса в [1]:

1. «Квазиклассический» подход, основанный на выборе напряженности электрического поля излучения атома (при снятии его возбуждения) в *комплексном* виде

$$\mathcal{E}_{quasi}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t<0, \\ \mathcal{E}_0 \exp(-\Gamma_\omega t/2) \exp(i\omega_0 t), & \text{если} \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{11}$$

и квантовая теория приводят к одной и той же плотности вероятности (6) *момента времени распада* квазистационарного состояния, а также к совпадающим плотностям вероятности

$$f_{quant}(\omega) = f_{quasi}(\omega) = \frac{\Gamma_\omega}{2\pi} \frac{1}{(\omega_0-\omega)^2 + \Gamma_\omega^2/4} \tag{12}$$

частоты (*и энергии*) *излучения* этой системы при ее распаде. Важно отметить, что средние значения ω_0 (и E_0) этого излучения получается из указанных распределений лишь при интегрировании *по всей области от* $-\infty$ *до* $+\infty$. Интегрирование же от 0 до $+\infty$, то есть по области, которая только и допускается в физике в качестве реально наблюдаемой, дает «нефизические» средние значения $\overline{\omega}=\infty$, $\overline{E}=\infty$.

2. *Точное* для лоренцева распределения *равенство* $\Gamma_E \tau = \hbar$ *не может иллюстрировать соотношение неопределенностей* для энергии и времени (1), так как для этого распределения на самом деле имеет место «строгое» неравенство (см. ниже вывод 4)

$$\Delta E\, \Delta t >> \hbar/2, \tag{13}$$

в котором $\Delta E = \infty$. Это значит, что в случае лоренцева распределения нельзя из общего соотношения (1) получить некое приближенное неравенство (2), даже подразумевая в нем в качестве Γ_E ширину на полувысоте этого распределения, в силу просто того, что для лоренцева распределения левая часть (1) равна бесконечности, а правая часть соотношения (1) – вполне конечному (и весьма малому) числу $\hbar/2$.

Можно, конечно, под соотношением неопределенностей в случае лоренцева распределения понимать само вытекающее из (10) соотношение (2), что, по существу, обычно и делается. Но в таком случае Γ_E уже не будет удовлетворять изначальному термину «неопределенность энергии», имеющему общепринятый смысл *среднего квадратичного отклонения энергии*.

3. Аналогичный «классический» подход, основанный на формуле для напряженности

$$\mathcal{E}_{class}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t<0, \\ \mathcal{E}_0 \exp(-\Gamma_\omega t/2) \cos\omega_0 t, & \text{если} \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{14}$$

в *вещественном* виде, приводит, вместо (6), к более громоздкому *распределению моментов времени*

$$f_{class}(t) = \Gamma_\omega \exp(-\Gamma_\omega t) \frac{\left(\Gamma_\omega^2 + 4\omega_0^2\right)\cos^2\omega_0 t}{\Gamma_\omega^2 + 2\omega_0^2}, \tag{15}$$

а вместо (12), – *к симметричной относительно* $\omega = 0$ плотности вероятности

$$f_{class}(\omega) = \frac{2\Gamma_\omega(\Gamma_\omega^2 + 4\omega_0^2)}{\pi(\Gamma_\omega^2 + 2\omega_0^2)} \frac{\Gamma_\omega^2 + 4\omega^2}{(4\omega^2 + 4\omega_0^2 + \Gamma_\omega^2)^2 - 64\omega^2\omega_0^2}. \tag{16}$$

Формула (15) переходит в (6) в двух предельных случаях: 1) при $\omega_0 = 0$, что соответствует плавному убыванию напряженности электрического поля (например, внутри конденсатора при его разрядке); 2) при $\omega_0 \to \infty$ и усреднении по периоду колебаний, при котором $\cos^2\omega_0 t$ заменяется на $1/2$. Однако распределение (16) дает «нефизические» средние значения $\overline{\omega} = 0$ при интегрировании от $-\infty$ до $+\infty$ и $\overline{\omega} = \infty$ при интегрировании от 0 до $+\infty$. Эти результаты позволяют сделать выбор, разумеется, в пользу «полуклассического» и квантового подходов, причем *с учетом отрицательных частот и энергий*, поскольку только тогда и получаются «нужные» средние значения ω_0 и E_0 для этих распределений.

4. Все три распределения, причем при интегрировании по обеим возможным областям (от $-\infty$ до $+\infty$ и от 0 до $+\infty$) приводят к бесконечным средним квадратичным отклонениям $\Delta\omega$ и ΔE, что в этом отношении не дает преимущества ни одному из этих распределений.

3. Лазерные импульсы и соотношение неопределенностей для энергии и времени

В этом пункте мы обсудим аналогичные вопросы, рассмотрев другой принципиально важный случай, по отношению к которому соотношение неопределенностей для энергии и времени может быть применено в конкретных оценочных расчетах или при моделировании соответствующего излучения.

3. 1. «Время излучения» и вероятностные характеристики момента излучения и регистрации отдельного фотона лазерного импульса. Покажем теперь, что, в отличие от квазистационарных систем, для которых, как мы выяснили, $\Delta t = \tau$, для лазерного импульса, излучение которого формально начинается при $t = -\infty$, достигает максимума при $t = 0$ и заканчивается при $t = \infty$, следует считать, что среднее *квадратичное отклонение* Δt *момента времени излучения «отдельного» фотона* подчиняется формуле (4), то есть в 2 раза меньше времени излучения τ_{rad}, понимаемого как продолжительность того интервала времени, на протяжении которого фотон с большой степенью вероятности должен быть излучен. Это влечет за собой из общего неравенства (1), при осуществлении связи $\Delta E = \Gamma_E/2$, которую мы также установим, более уместное, в данном случае, неравенство (3) и, стало быть, приближенное равенство (5).

Конкретный критерий времени излучения τ_{rad} должен, конечно, быть определен, исходя из конкретных опытных данных. Например, достаточно кратковременные импульсы в «*квазиклассическом подходе*» можно описать гауссовской *плотностью вероятности момента времени излучения фотона*

$$f_{quasi}(t) = f_{class}^{(appr)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\tau}\exp(-2t^2/\tau^2), \tag{17}$$

которая, в частности, получается, как и выше, из «классической» *плотности вероятности момента времени излучения фотона в двух случаях:* 1) при $\omega_0 = 0$, что отвечает

ISSN 2413–9858

соответствующему поведению напряженности электрического поля; 2) при $\omega_0 \to \infty$ и усреднении по периоду колебаний с заменой $\cos^2\omega_0 t$ на $1/2$ в точном выражении для «классической» *плотности вероятности (момента времени излучения фотона)*

$$f_{class}(t) = \frac{c\rho_E(t)}{dE_{tot}/dS} = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{1}{\tau}\frac{\exp(-2t^2/\tau^2)\cos^2\omega_0 t}{1+\exp(-\omega_0^2\tau^2/2)}. \tag{18}$$

Формулы (17), (18) возникают при моделировании процесса лазерного излучения путем привлечения зависимости от времени напряженности электрического поля (в некоторой области пространства), соответственно «квазиклассическому» и «классическому» описанию, в виде

$$\mathscr{E}_{quasi}(t) = \mathscr{E}_0\exp(-t^2/\tau^2)\exp(-i\omega_0 t), \quad \mathscr{E}_{class}(t) = \mathscr{E}_0\exp(-t^2/\tau^2)\cos\omega_0 t, \tag{19}$$

где $\mathscr{E}_0 = \mathrm{const}(t)$; $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ – центральная циклическая частота излучения, τ – параметр, характеризующий длительность излучения, амплитуда и интенсивность которого достигают максимума при $t=0$.

Если нас интересуют статистические характеристики *самого момента t излучения* фотона в составе одного лазерного импульса, то точка $\mathbf{r}$ должна подразумеваться в середине лазера. А если интересуют аналогичные характеристики *регистрации* фотона *где-либо на пути лазерного пучка*, то, конечно, согласно (19), центр волнового пакета должен проходить через точку $\mathbf{r}$ в средний момент времени $\bar{t}=0$. Для определенности, мы продолжим использовать фразеологию, подходящую больше для второго случая.

В (18) функция $f_{class}(t)$ равна отношению плотности потока энергии $c\rho_E(t)$ в окрестности заданной точки $\mathbf{r}$ к интегралу от этой же величины – полной энергии, проходящей через выделенную единичную площадку, перпендикулярную к среднему направлению излучения, присутствующего вблизи точки $\mathbf{r}$:

$$\frac{dE_{class,\,tot}}{dS} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\mathscr{E}^2_{class}}{4\pi}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\mathscr{E}_0^2\exp(-2t^2/\tau^2)\cos^2\omega_0 t}{4\pi}dt = \frac{c\tau\mathscr{E}_0^2}{16}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1+\exp(-\omega_0^2\tau^2/2)\right]. \tag{20}$$

Аналогично вычисляется и функция $f_{quasi}(t)$ в (17), с той лишь разницей, что, вместо использования точного выражения для плотности потока энергии из классической электродинамики, в «квазиклассическом подходе» достаточно «постулировать» (как обычно), что соответствующая плотность потока энергии прямо пропорциональна квадрату модуля комплексной напряженности, записанной в (19).

Используя (18), (17), легко получить выражения для дисперсии момента времени излучения:

$$D_{t,\,class} = \frac{\tau^2}{4}\frac{1+\left(1-\omega_0^2\tau^2\right)\exp(-\omega_0^2\tau^2/2)}{1+\exp(-\omega_0^2\tau^2/2)}, \quad D^{(appr)}_{t,\,class} = D_{t,\,quasi} = \frac{\tau^2}{4}, \tag{21}$$

в которых второе («приближенное») выражение для «классической» дисперсии получается из первого при $\omega_0\tau >> 1$, что соответствует переходу от (18) к (17) при $\omega_0 \to \infty$. Согласно (19), оба распределения (18) и (17) дают нулевой *средний момент времени излучения*.

ISSN 2413–9858

В соответствии с (21), *среднее квадратичное отклонение момента времени излучения* в «квазиклассическом» подходе *при всех значениях* параметра ω_0, а также в «классическом» подходе 1) *точно* при $\omega_0 = 0$ и 2) *приближенно* при $\omega_0 \tau >> 1$ оказывается равным

$$\Delta t_{quasi} = \Delta t_{class}^{(appr)} = \tau / 2\,, \tag{22}$$

где параметр τ характеризует длительность процесса излучения источника, а также продолжительность присутствия этого излучения вблизи некоторой точки $\mathbf{r}$, через которую оно распространяется.

Вытекающая из (19) интенсивность излучения, понимаемая в классической электродинамике как усредненная по некоторому времени плотность потока энергии, равна

$$I(t) = \frac{c\mathcal{E}_0^2}{8\pi} \exp(-2t^2/\tau^2) = I_{\max} \exp(-2t^2/\tau^2)\,, \tag{23}$$

откуда следует, что интенсивность максимальна при $t = 0$, а в моменты $t = -\tau$ и $t = \tau$ меньше максимальной в $e^2 \approx 7.4$ раза. Следовательно, можно сказать, что в таком понимании, *параметр* τ *характеризует длительность излучения*.

Применительно к гауссовскому распределению, в качестве длительности излучения уместно использовать и такой интервал времени $\tilde{\tau}_{rad} = t_2 - t_1$, в начальный и конечный моменты t_1, t_2 которого интенсивность излучения меньше максимальной в 2 раза. Согласно (23), эти моменты t_1, t_2 и $\tilde{\tau}_{rad}$ равны

$$-t_1 = t_2 = \tau\sqrt{\ln 2/2} \approx 0.589\tau \approx 1.18\Delta t_{quasi}\,, \quad \tilde{\tau}_{rad} = 2t_2 = \tau\sqrt{2\ln 2} \approx 1.18\tau \approx 2.36\Delta t_{quasi}. \tag{24}$$

Из первого соотношения (24) следует (в соответствии с общепринятой формулировкой о случайных величинах с гауссовским распределением), что если число 1.18 заменить единицей, то можно считать, что модули моментов времени t_1 и t_2 приблизительно равны *среднему квадратичному отклонению* Δt_{quasi} *момента времени излучения*. При этом из второго соотношения (24) следует, что параметр τ примерно равен времени $\tilde{\tau}_{rad}$ излучения, характеризуемого напряженностями поля (19).

«В таком же приближении» можно сказать, что время $\tilde{\tau}_{rad} \approx 2\Delta t_{quasi}$, согласно (24). Поэтому соотношение (4) оказывается точнее, чем $\tilde{\tau}_{rad} \approx \Delta t$, которое обычно полагается в (1) при «получении» из него наиболее употребительного (2). Очевидно, что *еще точнее соотношение* (4) *будет выполняться для более длительных импульсов излучения*, чем те, интенсивность которых можно описать зависимостью (23).

Таким образом, можно сделать вывод, *что в случае лазерных импульсов соотношения* (4) *и* (5) *более уместны, чем* (2), *в предположении, вдобавок, что выполняется еще и соотношение* $\Delta E \approx \Gamma_E / 2$, которое мы обсудим в следующем подпункте.

3. 2. Распределение вероятности энергии фотона в лазерном импульсе в квазиклассическом подходе. Обсудим, в какой мере можно реализовать соотношение $\Delta E \approx \Gamma_E / 2$ для лазерного излучения и установим взаимосвязь среднеквадратичных отклонений Δt и $\Delta\omega$, когда Δt определяется формулами (21), (22). Выясним также роль, которую, возможно, играют отрицательные энергии в данном случае. Будем ниже рассматривать, в основном, квазиклассический подход, как наиболее реальный, по крайней мере по сравнению с классическим, как это выяснилось выше.

Разложим функцию $\mathcal{E}_{quasi}(t)$ в (19) в интеграл Фурье согласно формулам

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{Four}(\omega)\exp(-i\omega t)\,d\omega; \qquad F_{Four}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\exp(i\omega t)\,dt. \tag{25}$$

Подставив $\mathcal{E}_{quasi}(t)$ из (19) во вторую формулу (25), находим спектральную амплитуду:

$$\mathbf{F}^{(quasi)}_{Four}(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0 \tau}{2\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{4}\right]. \tag{26}$$

Для разложения (25) имеет место общее соотношение (Парсеваля)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2\,dt = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} |F_{Four}(\omega)|^2\,d\omega. \tag{27}$$

Таким образом, для заданной напряженности поля, например, $\mathcal{E}_{quasi}(t)$ из (19), спектральную плотность энергии $\rho_{E,\,quasi}(\omega)$ *во всей области частот* $(-\infty,+\infty)$ можно ввести, записав интегралы вида (20), используя (19) и (27):

$$\frac{dE_{class,\,tot}}{dS} = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{E}_{class}(t)\right|^2 dt \equiv \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{F}^{(class)}_{Four}(\omega)\right|^2 d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\rho_{E,\,class}(\omega)\,d\omega, \tag{28}$$

$$\frac{dE_{quasi\,,\,tot}}{dS} = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathcal{E}_{quasi}(t)\right|^2 dt \equiv \frac{c}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{F}^{(quasi)}_{Four}(\omega)\right|^2 d\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\rho_{E,\,quasi}(\omega)\,d\omega = \frac{c\tau\mathcal{E}_0^2}{4\sqrt{2\pi}}, \tag{29}$$

откуда, по определению, следует, что количество энергии, приходящейся на единичный интервал циклической частоты и прошедшей за все время наблюдения через *единичную* площадку, перпендикулярную к среднему направлению вполне направленного электромагнитного излучения, равно

$$\rho_{E,\,quasi}(\omega) = \frac{c}{2}\left|\mathbf{F}_{Four}(\omega)\right|^2. \tag{30}$$

Тогда, поделив эту спектральную плотность на соответствующий интеграл (29), можно ввести соответствующую *плотность вероятности регистрации циклической частоты* в данном излучении в окрестности заданной точки $\mathbf{r}$:

$$f_{quasi}(\omega) \equiv \frac{\rho_{E,\,quasi}(\omega)}{dE_{tot}/dS} = \frac{\rho_{E,\,quasi}(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty}\rho_{E,\,quasi}(\omega)\,d\omega} = \frac{\left|\mathbf{F}_{Four}(\omega)\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathbf{F}_{Four}(\omega)\right|^2 d\omega}. \tag{31}$$

Очевидно, эта функция нормирована на единичную вероятность, и с ее помощью можно вычислить все характеристики спектрального состава излучения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{quasi}(\omega)\, d\omega = 1\,. \tag{32}$$

Используя (26), (31), получаем $f_{quasi}(\omega)$, $f_{class}(\omega)$ для излучений, заданных формулами (19):

$$f_{quasi}(\omega) \;=\; \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{2} \right], \tag{33}$$

$$f_{class}(\omega) \;=\; \frac{\tau}{2\left[1+\exp(-\omega_0^2\tau^2/2)\right]\sqrt{2\pi}} \left\{ \exp\left[-\frac{(\omega+\omega_0)^2\tau^2}{4} \right] + \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2\tau^2}{4} \right] \right\}^2 . \tag{34}$$

Функция (33) – гауссоида с максимумом при $\omega=\omega_0$, тогда как функция (34) имеет два максимума вблизи $\omega=\pm\omega_0$ и минимум при $\omega=0$, относительно которого она симметрична.

Вычислим для этих распределений средние $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega^2}$ и соответствующие дисперсии:

$$\overline{\omega}_{quasi} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega f_{quasi}(\omega)\, d\omega = \omega_0, \quad \left(\overline{\omega^2}\right)_{quasi} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 f_{quasi}(\omega)\, d\omega = \omega_0^2 + \frac{1}{\tau^2}, \quad \left(D_\omega\right)_{quasi} = \frac{1}{\tau^2}, \tag{35}$$

$$\overline{\omega}_{class} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega f_{class}(\omega)\, d\omega = 0, \quad \left(\overline{\omega^2}\right)_{class} = \frac{\omega_0^2}{1+\exp(-\omega_0^2\tau^2/2)} + \frac{1}{\tau^2}, \quad \left(D_\omega\right)_{class} = \left(\overline{\omega^2}\right)_{class}. \tag{36}$$

Из (35), (36) следует, что среднее значение циклической частоты $\overline{\omega}$ *точно равно* ω_0 только для «квазиклассического» подхода – *также как и в случае распада квазистационарных состояний*, рассмотренном выше, а произведение $\Delta\omega\Delta t$, при этом, *точно равно* $1/2$ – минимально возможному допустимому значению, в соответствии с квантовомеханическим соотношением (1):

$$\overline{\omega}_{quasi} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega f_{quasi}(\omega)\, d\omega = \omega_0, \qquad (\Delta\omega)_{quasi} = \frac{1}{\tau}, \qquad (\Delta\omega\Delta t)_{quasi} = \frac{1}{2}, \qquad (\Delta E\,\Delta t)_{quasi} = \frac{\hbar}{2}. \tag{37}$$

Стало быть, минимально возможное значение $\Delta E\Delta t = \hbar/2$ свидетельствует о соответствии «квазиклассического» подхода рассмотрению подобного вопроса в рамках квантовой механики. Аналогичное соответствие «квазиклассического» и квантового подходов установлено выше для квазистационарных состояний, хотя это соотношение для них уже не соблюдается, а имеет место неравенство (13).

Как видно из (36), (37), учет вклада *отрицательных* энергий при использовании «квазиклассического» подхода *принципиален*. Этот вклад особенно важен при малых значениях ω_0, причем когда $\omega_0=0$, он в точности равен вкладу положительных частот. В этом случае обе напряженности в (19) переходят в одну и ту же гауссоиду. Однако малые частоты соответствуют большим длинам волн, которые, с позиции фотонов, представляют последних в виде *виртуальных* в конкретных наблюдаемых явлениях (обмен «виртуальными» фотонами обмоток трансформатора, впрочем, весьма реален). Между тем, виртуальные фотоны, согласно соотношению неопределенностей для энергии и времени, вполне могут иметь отрицательные энергии в промежуточных состояниях.

Таким образом, достаточно кратковременные импульсы лазерного излучения вполне адекватно описываются, «квазиклассическими» напряженностью $\mathcal{E}_{quasi}$ в (19) и распределением (33) по частотам $f_{quasi}(\omega)$. Следует также отметить, что для распределения (33) «ширина на полувысоте» Γ_E действительно превышает величину ΔE не намного больше, чем в 2 раза:

$$\Gamma_E = \hbar\Gamma_\omega = 2\hbar\sqrt{2\ln 2}/\tau = 2\hbar\Delta\omega\sqrt{2\ln 2} = 2\Delta E\sqrt{2\ln 2} = 2\cdot 1.18\Delta E \approx 2\cdot\Delta E = 2\hbar/\tau \tag{38}$$

[см. (37)]. Поэтому, согласно (22), (24), (38), связь длительности излучения одного лазерного импульса, понимаемая как $\tilde{\tau}_{rad} = \tau\sqrt{2\ln 2} = 1.18\tau \approx \tau$, с шириной Γ_E определяется достаточно подходящим приближенным равенством (5).

Применение равенства (5), в целом, представляется приемлемым для практических целей. В случае кратковременных импульсов оно является более наглядным, поскольку под длительностью излучения *одного импульса* понимается просто отрезок времени τ_{rad}, примерно превышающий в 2 раза среднее квадратичное отклонение Δt *момента времени излучения одного фотона* и почти совпадающий с параметром τ «квазиклассической» напряженности $\mathcal{E}_{quasi}(t)$ в (19). Очевидно, эту напряженность иногда можно использовать для описания некоторых особенностей кратковременных импульсов вместо реального применения распределения плотности вероятности обнаружения фотона в заданной точке пространства, определяемой с помощью одночастичной волновой функции фотона в координатном представлении в виде волнового пакета, предложенного в [8–10].

Заключение

Проведенный анализ лазерного короткоимпульсного излучения позволяет сформулировать несколько выводов:

1. При изучении эволюции квантовых систем заметную роль могут играть характеристики, связанные с распределением вероятностей *моментов времени* наступления соответствующих событий. Так, для кратковременных лазерных импульсов весьма характерной *плотностью вероятности* $f(t)$ *момента времени излучения фотона* является гауссоида (17), а для квазистационарных состояний – функция (6).

Функция $f(t)$ характеризует также и плотность вероятности *момента времени регистрации фотона* в окрестности заданной точки пространства, через которую в той ли иной степени прошло излучение.

Зная функцию $f(t)$, можно вычислить все сопутствующие “временные” характеристики: $\bar{t}$, $\overline{t^2}$, D_t, Δt и т. д. Таким образом, будет на полных правах определен второй множитель в соотношении неопределенностей (1), формально вытекающем из коммутатора для операторов $\hat{E}$ и $\hat{t}$. Тем самым, при соответствующей интерпретации величины ΔE соотношение (1) получает, «дисперсионную» трактовку.

2. *С теоретической точки зрения*, в «чисто» квантовом подходе способ вычисления функции $f(t)$ приведен в [1]. Однако, если его применение затруднительно, то предварительно можно воспользоваться «квазиклассическим» способом, апробированным в [1] и нашедшим также свое подтверждение в данной статье. «Квазиклассическая» плотность вероятности зарегистрировать момент времени t попадания излученного фотона в окрестность некоторой точки $\mathbf{r}$, в которой *комплексная* напряженность $\mathcal{E}_{quasi}(t)$ электрического поля задана по некоторому закону, например, в (19), равна отношению плотности потока энергии $c\rho_E(t)$ в окрестности этой точки к интегралу по времени от этой

же величины – полной энергии, проходящей через выделенную единичную площадку, перпендикулярную к среднему направлению излучения, присутствующего вблизи указанной точки $\mathbf{r}$. Аналогично вводится и «классическая» плотность вероятности.

3. Проведенный в [1] и в настоящей статье анализ позволяет сделать вывод о возможности придать соотношению неопределенностей для энергии и времени новую интерпретацию – «дисперсионную», при которой ΔE и Δt в соотношении (1) равны квадратным корням из дисперсий соответствующих величин, то есть равны средним квадратичным отклонениям энергии и времени.

4. При обосновании данной трактовки возникла проблема учета вклада отрицательных энергий виртуальных фотонов. По нашему мнению, однако, понятие виртуальности фотонов весьма условно.

5. В отличие от распада квазистационарных состояний, импульсное лазерное излучение очень хорошо удовлетворяет «чисто квантовому» соотношению неопределенностей $\Delta E\,\Delta t \approx \hbar/2$. Следовательно, сразу становится возможным определить величину Γ_E как $\Gamma_E \approx 2\Delta E$, полагая время излучения одного лазерного импульса $\tau_{rad} \approx 2\Delta t$. В таком случае из соотношения $\Delta E\,\Delta t \approx \hbar/2$ вытекает приближенное равенство (5), в котором правая часть в 2 раза больше, чем правая часть общепринятого соотношения (2), используемого для всякого рода оценок. Таким образом, корректность применения соотношения неопределенностей для энергии и времени определяется предварительным выяснением характера механизма соответствующего излучения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов А.П. Курс лекций по квантовой механике. Математический аппарат квантовой механики: учеб. пособие. Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2014. 188 с.

2. Давыдов А.П. Доказательство соотношения неопределенностей для энергии и времени в рамках квазиклассического подхода описания электромагнитных сигналов и излучения // Современные проблемы науки и образования: материалы XLVII внутривуз. науч. конф. преподавателей МаГУ. Магнитогорск: МаГУ, 2009. С. 358–360.

3. Давыдов А.П. О соотношении неопределенностей для энергии и времени при квазиклассическом описании электромагнитного излучения // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Том 1. Материалы VII Международного симпозиума. М.: РАН, 2012. С. 80–88.

4. Давыдов А.П. Строгое доказательство соотношения неопределенностей для энергии и времени в духе доказательства соотношений неопределенностей Гейзенберга // Современные проблемы науки и образования: материалы XLVII внутривуз. науч. конф. преподавателей МаГУ. Магнитогорск, 2009. С. 344–346.

5. Давыдов А.П. Общее доказательство соотношения неопределенностей для энергии и времени в дисперсионной трактовке в квазиклассическом и квантовом случаях // Современные проблемы науки и образования: Матер. докл. XLVIII внутривуз. науч. конф. преподавателей МаГУ. Магнитогорск: МаГУ, 2010. С. 323–325.

6. Давыдов А.П. О дисперсионной трактовке соотношений неопределенностей для энергии и времени в квантовой механике // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Т. 2. – Материалы IX Международного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения академика В.П. Макеева. М.: РАН, 2014. С. 17–24.

7. Давыдов А.П. Об одной реализации дисперсионной интерпретации соотношения неопределенностей для энергии и времени // Физико-математические науки и образование: сборник трудов участников Всероссийской научно-практической конференции. Магнитогорск: МаГУ, 2012. С. 107–114.

8. Давыдов А.П. Волновая функция фотона в координатном представлении // Вестник МаГУ. Естественные науки. 2004. Вып. 5. С. 235–243.

9. Давыдов А.П. Квантовая механика фотона: волновая функция в координатном представлении // Электромагнитные волны и электронные системы. 2015. Т. 20, № 5. С. 43–61.

10. Давыдов А. П. Волновая функция фотона в координатном представлении. – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2015. 180 с.

11. Матвеев А. Н. Атомная физика. М.: Высшая школа, 1989. 439 с.

12. Бор Н. Квантовый постулат и новейшее развитие атомной теории. – Избранные научные труды, т. II. М.: Наука, 1971. 675 с.

13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963.

14. Мандельштам Л. И., Там И. Е. Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике // Изв. АН СССР, сер. физич., 1945, т. 9, вып. 4. С. 122–128.

15. Bush P. The time energy uncertainty relation // arXiv:quant-ph/0105049v2. 2004.

16. Heisenberg W. Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // Zeitschrift für Physik. 1927. Vol. 43. P. 172–198.

17. Folland G., Sitaram A. The Uncertainty Principle: A Mathematical Survey // Journal of Fourier Analysis and Applications. 1997. P. 207–238.

REFERENCES

1. Davydov A.P. *Kurs lektsiy po kvantovoy mekhanike. Matematicheskiy apparat kvantovoy mekhaniki: ucheb. posobie* [A course of lectures on quantum mechanics. The mathematical apparatus of quantum mechanics: textbook]. Magnitogorsk: Izd-vo Magnitogorsk. gos. tekhn. un-ta im. G.I. Nosova, 2014. 188 p.

2. Davydov A.P. *Dokazatel'stvo sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni v ramkakh kvaziklassicheskogo podkhoda opisaniya elektromagnitnykh signalov i izlucheniya* [Proof of the uncertainty relation for energy and time in the quasi-classical approach of describing electromagnetic signals and radiation]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya: materialy XLVII vnutrivuz. nauch. konf. prepodavateley MaGU.* Magnitogorsk: MaGU, 2009, pp. 358–360.

3. Davydov A.P. *O sootnoshenii neopredelennostey dlya energii i vremeni pri kvaziklassicheskom opisanii elektromagnitnogo izlucheniya* [On the uncertainty relation for energy and time in the quasi-classical description of electromagnetic radiation]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy nauki. Tom 1. Materialy VII Mezhdunarodnogo simpoziuma.* Moscow: RAN, 2012, pp. 80–88.

4. Davydov A.P. *Strogoe dokazatel'stvo sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni v dukhe dokazatel'stva sootnosheniy neopredelennostey Geyzenberga* [Strict proof of the uncertainty relation for energy and time in the spirit of the proof of Heisenberg's uncertainty relations]. Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya: materialy XLVII vnutrivuz. nauch. konf. prepodavateley MaGU. Magnitogorsk, 2009, pp. 344–346.

5. Davydov A.P. *Obshchee dokazatel'stvo sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni v dispersionnoy traktovke v kvaziklassicheskom i kvantovom sluchayakh* [General proof of the uncertainty relation for energy and time in the dispersion interpretation in the quasi-classical and quantum cases]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya: Mater. dokl. XLVIII vnutrivuz. nauch. konf. prepodavateley MaGU.* Magnitogorsk: MaGU, 2010, pp. 323–325.

6. Davydov A.P. *O dispersionnoy traktovke sootnosheniy neopredelennostey dlya energii i vremeni v kvantovoy mekhanike* [On the dispersion treatment of the uncertainty relations for energy and time in quantum mechanics]. *Fundamental'nye i prikladnye problemy nauki. T. 2. – Materialy*

IX Mezhdunarodnogo simpoziuma, posvyashchennogo 90-letiyu so dnya rozhdeniya akademika V.P. Makeeva. Moscow: RAN, 2014, pp. 17–24.

7. Davydov A.P. *Ob odnoy realizatsii dispersionnoy interpretatsii sootnosheniya neopredelennostey dlya energii i vremeni* [On one realization of the dispersion interpretation of the uncertainty relation for energy and time]. *Fiziko-matematicheskie nauki i obrazovanie: sbornik trudov uchastnikov Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii.* Magnitogorsk: MaGU, 2012, pp. 107–114.

8. Davydov A.P. *Volnovaya funktsiya fotona v koordinatnom predstavlenii* [The photon wave function in the coordinate representation]. *Vestnik MaGU. Estestvennye nauki.* 2004. V. 5, pp. 235–243.

9. Davydov A.P. *Kvantovaya mekhanika fotona: volnovaya funktsiya v koordinatnom predstavlenii* [Quantum mechanics of a photon: the wave function in the coordinate representation] *Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy*. 2015. T. 20, № 5, pp. 43–61.

10. Davydov A. P. *Volnovaya funktsiya fotona v koordinatnom predstavlenii* [Volnovaja funkcija fotona v koordinatnom predstavlenii]. Magnitogorsk: MGTU im. G.I. Nosova, 2015. 180 p.

11. Matveev A. N. *Atomnaya fizika* [Atomic physics]. M.: Vysshaya shkola, 1989. 439 p.

12. Bor N. *Kvantovyy postulat i noveyshee razvitie atomnoy teorii* [Quantum postulate and the newest development of the atomic theory]. *Izbrannye nauchnye trudy, t. II.* Moscow: Nauka, 1971. 675 p.

13. Landau L. D., Lifshits E. M. *Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya*. Moscow: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1963.

14. Mandel'shtam L. I., Tam I. E. *Sootnoshenie neopredelennosti energiya-vremya v nerelyativistskoy kvantovoy mekhanike* [The uncertainty relation between energy and time in nonrelativistic quantum mechanics]. *Izv. AN SSSR, ser. fizich*., 1945, V. 9, No. 4, pp. 122–128.

15. Bush P. *The time energy uncertainty relation*. arXiv:quant-ph/0105049v2. 2004.

16. Heisenberg W. *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.* Zeitschrift für Physik. 1927. Vol. 43, pp. 172–198.

17. Folland G., Sitaram A. *The Uncertainty Principle: A Mathematical Survey*. Journal of Fourier Analysis and Applications. 1997, pp. 207–238.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Давыдов Александр Петрович

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, г. Магнитогорск, Россия, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной и теоретической физики Института естествознания и стандартизации,

E-mail: ap-dav@yandex.ru

Davydov Alexander Petrovich

Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, Russia, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Applied and Theoretical Physics, Institute of Natural Sciences and Standardization,

E-mail: ap-dav@yandex.ru

Корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с автором статьи:
455008, Челябинская обл., г. Магнитогорск, ул. Зеленый Лог, дом 30, кв. 103.
Давыдов А.П.
8-908-069-79-39