ISSN 2413–9858

УДК 531.3

О ЗАКОНЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗРЫВНОЙ НАГРУЗКИ НИТИ

И.М. Ахмедов, В.А. Наумов

ON THE DISTRIBUTION LAW OF THE THREAD BREAKING LOAD

I.M. Ahmedov, V.A. Naumov

Аннотация. Рассмотрены результаты испытаний прочности нитей из стекловолокна. Обнаружен промах измерений предельного относительного удлинения нити. Проверены гипотезы о законе распределения разрывной нагрузки нити. Данные выборки не противоречат гипотезам о распределении разрывной нагрузки по нормальному, логарифмически-нормальному или закону Вейбулла-Гнеденко. При этом наименьшее отклонение экспериментальных точек от теоретической плотности распределения получается при использовании закона Вейбулла-Гнеденко.

Ключевые слова: *нити; испытания прочности; разрывная нагрузка; относительное удлинение; закон распределения; проверка статистических гипотез.*

Abstract. The results of testing the strength of fiberglass yarns has been studied. A miss measurement of the ultimate elongation of the threads was discovered. The hypothesis of the distribution law of the filament breaking load was checked. Sampling data do not contradict the hypothesis about the distribution of the breaking load at the normal, log-normal or the Weibull-Gnedenko law. The least deviation of experimental points from the theoretical density distribution is obtained using the Weibull-Gnedenko law.

Keywords: *filament; strength tests; tensile strength; elongation; the distribution; testing of statistical hypotheses.*

Введение

Проблема определения прочностных характеристик нитей и канатов традиционно привлекает внимание исследователей (см. [1-3] и библиографию в них). Зависимость разрывной нагрузки от материала, типа и диаметра каната является случайной функцией. Если исследуются разрывные характеристики образцов одного и того же каната (нити), то получим случайную величину. Кроме естественных различий таких образцов, случайный характер величины разрывной нагрузки может зависеть от особенностей нагрузки даже в квазистатическом случае. На рис. 1 показано, полученное в [4] различие в процессе растяжения при равномерной и неравномерной нагрузке пучков волокон в нити. Наибольшее значение разрывной нагрузки наблюдалось только при испытании равномерно нагруженных пучков (рис. 1а). Разрушение нити при одновременном разрыве всех составляющих ее волокон обеспечивает полную реализацию прочностных характеристик нити. Неравномерность нагрузки является существенным стохастическим явлением.

Тип закона распределения разрывной нагрузки зависит от характера случайных факторов [5]. *Нормальный закон* реализуется, когда на величину разрывной нагрузки нити влияет большое число независимых или слабо зависимых факторов, влияние каждого из которых имеет один и тот же порядок. Плотность нормального закона распределения:

$$f_N(P) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(P-m)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{1}$$

где m – математическое ожидание разрывной нагрузки, σ – среднее квадратичное отклонение.

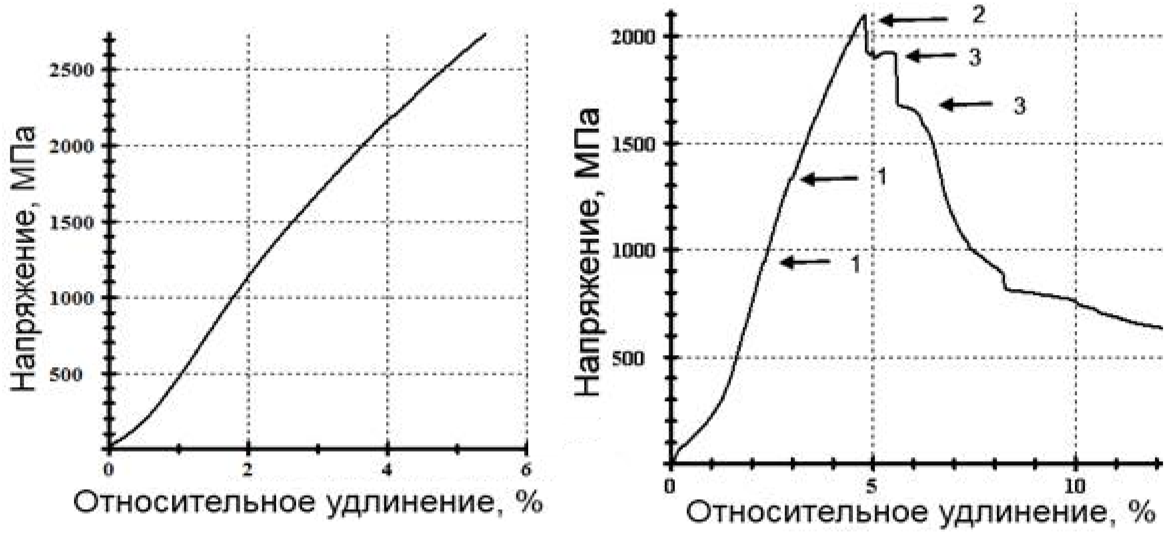

Рисунок 1 – Диаграммы растяжения нити [4]: а – при равномерной нагрузке и одновременном разрыве всех составляющих ее волокон; б – при неравномерной нагрузке пучков волокон в нити; 1 – разрушение перегруженных волокон, 2 – разрушение основной части волокон, 3 – разрушение оставшихся пучков волокна

Логарифмически-нормальный закон встречается, когда на величину разрывной нагрузки нити влияет достаточно большое число случайных и независимых факторов, интенсивность действия которых зависит от достигнутого состояния (модель пропорционального эффекта). Плотность логарифмически-нормального закона распределения (двухпараметрического):

$$f_L(P) = \frac{1}{P \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(\ln(P) - \mu)^2}{2\sigma^2} \right]. \quad (2)$$

Закон Вейбулла-Гнеденко проявляется в объектах, разрушение которых определяется предельным отклонением (модель слабого звена). Разрушение нити может происходить в разных волокнах при разной нагрузке. Если ресурс нити (каната) в целом определяется наиболее слабым его участком, то справедлива модель слабого звена. Плотность распределения Вейбулла-Гнеденко (двухпараметрического):

$$f_V(P) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \cdot \left(\frac{P}{\lambda} \right)^{k-1} \cdot exp\left[-\left(\frac{P}{\lambda} \right)^k \right], & при\, P \geq 0, \\ 0 \quad при\, P < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Затруднительно априорно оценить, какая из моделей адекватно описывает разрывную нагрузку как случайную величину. В данной статье предложено оценивать пригодность законов распределения с помощью результатов экспериментальных исследований.

Экспериментальные данные по разрывным нагрузкам нитей

Кроме данных, ранее обработанными авторами [6-7], были использованы экспериментальные результаты [8], представленные в табл. 1. В [8] испытывались нити стеклоткани на статическую прочность. Испытания проводились на универсальной электромеханической испытательной системе *Instron 5965* Центра экспериментальной механики Пермского национального исследовательского политехнического университета. Из таблицы 1 виден большой разброс значений разрывной нагрузки *P* и достигаемого

ISSN 2413–9858

относительного удлинения ε. Измерение ε_{39} = 0,65 % (выделено красным цветом в таблице 1) резко выделяется из ряда относительных удлинений. Прежде чем исследовать ряды, необходимо проверить, не является ли указанное измерение промахом.

Таблица 1 – Результаты экспериментального исследования прочности нитей стеклоткани [8]

№ пп	*P*, Н	ε, %	№ пп	*P*, Н	ε, %	№ пп	*P*, Н	ε, %
1	54,6	1,19	21	59,6	1,35	41	62,66	1,45
2	60,1	1,56	22	62,78	1,67	42	58,92	1,39
3	58,53	1,3	23	68,63	1,51	43	60,09	1,45
4	60,6	1,31	24	56,8	1,41	44	61,06	1,48
5	56,04	1,53	25	62,52	1,47	45	61,64	1,46
6	52,84	1,24	26	59,18	1,44	46	58,37	1,28
7	58,06	1,24	27	57,23	1,37	47	65,46	1,44
8	61,84	1,35	28	62,22	1,38	48	59,39	1,45
9	56,69	1,12	29	59,47	1,22	49	59,94	1,29
10	56,71	1,22	30	61,75	1,52	50	59,79	1,63
11	54,84	1,36	31	48,48	1,15	51	61,85	1,48
12	49,98	1,24	32	56,6	1,06	52	55,32	1,27
13	56,3	1,22	33	54,97	1,32	52	61,05	1,51
14	45,84	1,03	34	59,96	1,68	54	54,48	1,24
15	56,61	1,21	35	58,97	1,33	55	59,05	1,47
16	52,73	1,38	36	57,46	1,43	56	52,77	1,26
17	59,78	1,42	37	59,1	1,58	57	58,95	1,34
18	59,01	1,24	38	54,63	1,17	58	58,03	1,46
19	63,2	1,21	39	45,44	0,65	59	61,99	1,63
20	52,04	1,18	40	56,51	1,34	60	54,63	1,08

Рассчитаем по выборке точечные оценки математического ожидания и среднего квадратичного отклонения относительного удлинения: $\overline{\varepsilon} = 1{,}344\%$; $\overline{\sigma_\varepsilon} = 0{,}176\%$.

Нулевая гипотеза: ε_{39} принадлежит одной генеральной совокупности с остальными измерениями. Для проверки гипотезы были использованы критерии Граббса и Шарлье. Значение статистики по всем измерениям [9]:

$$K_\varepsilon = \left|\varepsilon_{39} - \overline{\varepsilon}\right| / \overline{\sigma_\varepsilon} = 3{,}936 . \tag{4}$$

Критические значения статистик Граббса K_G, Шарлье K_{Sh} в зависимости от объема выборки $n > 35$ при уровне значимости 5% рассчитаем по приближенным формулам [9]:

$$K_G(n) = 1{,}962 + 0{,}281 \cdot ln(n - 15), \quad K_{Sh}(n) = \frac{0{,}3381 + 0{,}7144 \cdot \ln(n)}{1 + 0{,}0885 \cdot \ln(n)} . \tag{5}$$

Так как $K_G(60) = 3{,}032 < K_\varepsilon$ и $K_{Sh}(60) = 2{,}395 < K_\varepsilon$ нулевая гипотеза должна быть отвергнута. Такое заключение подтверждается и другими критериями, в частности, критерием «трех сигма»:

$$\overline{\varepsilon} - 3 \cdot \overline{\sigma_\varepsilon} = 0{,}815 > 0{,}65 = \varepsilon_{39} . \tag{6}$$

Следовательно, значение ε_{39} является промахом и должно быть исключено из рассмотрения. Среди измерений P промахов не обнаружено. При отдельном изучении случайной величины P объем выборки остается прежним, n = 60.

ISSN 2413–9858

Закон распределения разрывной нагрузки

Гипотеза 1: Разрывная нагрузка подчиняется нормальному закону распределения с плотностью вероятности (1). Точечные оценки параметров генеральной совокупности были рассчитаны по выборке: $\overline{P} = 57,90\,H$; $\overline{\sigma_P} = 4,28\,H$. Для проверки гипотезы 1 был использован модифицированный критерий Пирсона с 8-ю интервалами; результаты расчетов представлены в табл. 2. Границы интервалов были найдены по заданным значениям теоретических частот попаданий в интервалы.

Таблица 2 – Результаты расчета статистики Пирсона χ^2

№ интервала	Теоретическая частота, nt_j	Границы интервала	Эмпирическая частота, ne_j	$\left(nt_j - ne_j\right)^2 / nt_j$
1	7	[41,90; 52,81]	7	0
2	7	(52,81; 54,78]	5	0,572
3	8	(54,78; 56,44]	5	1,125
4	8	(56,44; 57,90]	8	0
5	8	(57,90; 59,36]	11	1,125
6	8	(59,36; 61,02]	10	0,50
7	7	(61,02; 63,01]	10	1,286
8	7	(63,01; 69,03]	4	1,286
Σ	60		60	5,983

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^{8} \left(nt_j - ne_j\right)^2 / nt_j = 5,983. \tag{7}$$

Квантиль нормального распределения может быть рассчитан по формуле [9]:

$$u(\alpha) = 4,91 \cdot \left[(1-\alpha)^{0,14} - \alpha^{0,14}\right], \tag{8}$$

где α – уровень значимости.

Критическое значение статистики Пирсона может быть рассчитано по формуле Вилсона-Хилферти [9]:

$$\chi^2_{кр} = fc \cdot \left[1 - \frac{2}{9 \cdot fc} + u(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{2}{9 \cdot fc}}\right]^3, \quad fc = N - J - 1, \tag{9}$$

где N = 8 – количество интервалов, J = 2 – количество числовых характеристик закона распределения, оцениваемых по выборке, fc = 5 – число степеней свободы.

По формулам (8)-(9) получаем:

$$\chi^2_{кр}(0,02) = 13,40;\ \chi^2_{кр}(0,05) = 11,05;\ \chi^2_{кр}(0,1) = 9,21.$$

При всех указанных уровнях значимости $\chi^2 < \chi^2_{кр}$. Следовательно, гипотеза 1 не отвергается.

Гипотеза 2: Разрывная нагрузка подчиняется закону распределения Вейбулла-Гнеденко с плотностью вероятности (3), как принято в [10]. Параметры распределения могут быть найдены из системы уравнений:

$$\overline{P} = \int_0^\infty P \cdot f_V(P)\, dP, \quad \left(\overline{\sigma_P}\right)^2 = \int_0^\infty \left(P - \overline{P}\right)^2 \cdot f_V(P)\, dP. \qquad (10)$$

Решение (10) численным методом дает k = 16,45; λ = 59,77. Рассчитанное значение статистики Пирсона $\chi^2 = 4{,}96 < \chi^2_{кр}$ говорит, что данные выборки не противоречат гипотезе 2. На рис. 2 теоретические кривые плотности распределения сопоставляются с эмпирическими точками. Видно, что при P < 57 Н эмпирические точки ближе к графику $f_N(P)$, а при P > 60 Н – к графику $f_V(P)$.

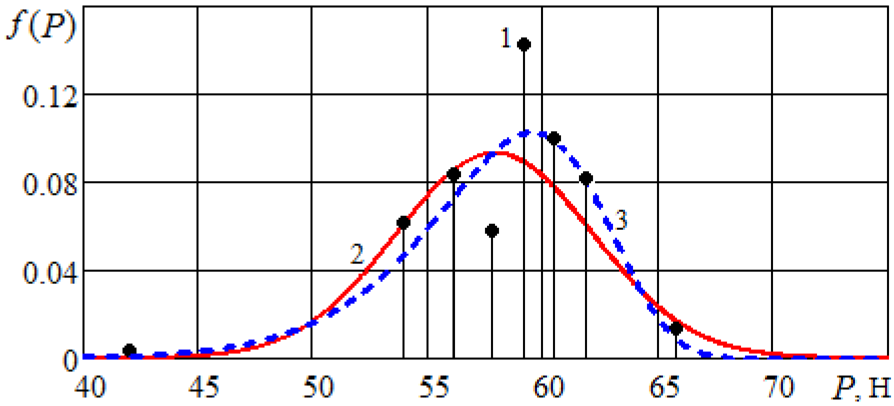

Рисунок 2 – Плотность распределения разрывной нагрузки нити: 1 – эмпирическая, по данным опытов [8], 2 – теоретическая нормальная, 3 – теоретическая Вейбулла

При проверке 3-й гипотезы (разрывная нагрузка подчиняется логарифмически-нормальному закону распределения) получено $\chi^2 = 6{,}75$, что также меньше $\chi^2_{кр}$.

Заключение

Среди измерений предельного относительного удлинения во время разрыва нити обнаружен промах, который должен быть исключен из рассмотрения. Среди измерений разрывной нагрузки промахов не обнаружено. Установлено, что данные выборки не противоречат гипотезам о распределении разрывной нагрузки по нормальному, логарифмически-нормальному или закону Вейбулла-Гнеденко. При этом наименьшее отклонение экспериментальных точек от теоретической плотности распределения получается при использовании закона Вейбулла-Гнеденко.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leech C.M., Hearle J.W.S, Overington M.S., Banfield S.J. Modelling tension and torque properties of fibre ropes and splices // Third International Offshore and Polar Engineering Conference (Singapore, 6-11 June, 1993), pp. 370-376.

2. Болотный А.П., Сысоева Е.К., Проталинский С.Е. Анализ разрушений нитей в процессе переработки на ткацких переходах // Вестник Костромского государственного технологического университета, 2002. № 5. С. 46-48.

3. Волоховский В.Ю., Воронцов А.Н., Каган А.Я. Вероятностная оценка прочности стальных канатов по данным магнитной дефектоскопии // Вестник Московского энергетического института, 2002. № 5. С.5-10.

4. Степашкин А.А., Максимкин А.В., Чуков Д.И., Чердынцев В.В. Опыт исследования механических свойств высокопрочного волокна на основе

сверхвысокомолекулярного полиэтилена // Современные проблемы науки и образования, 2013. № 6. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=10755.

5. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: учебник. Москва: КНОРУС, 2010. 664 с.

6. Наумов В.А., Ахмедова Н.Р., Ахмедов И.М. Анализ результатов испытания прочности трехпрядных канатов из полимерных материалов // Известия КГТУ, 2015. № 36. С. 43-51.

7. Великанов Н.Л., Наумов В.А, Примак Л.В., Ахмедов И.М. Испытания прочности канатов из полимерных материалов // Механизация строительства, 2017. Т. 78, № 4. С. 30-35.

8. Лобанов Д.С., Темерова М.С. Особенности квазистатических испытаний нитей и тканей // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика, 2013. № 2. С. 96–109.

9. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Москва: Физматлит, 2006. 816 с.

10. Темерова М.С., Вильдеман В.Э. Статические и динамические испытания лент и нитей стеклоткани как армирующих элементов композиционных материалов // Математическое моделирование в естественных науках. Материалы XXIII Всероссийской школы-конференции молодых учёных и студентов (Пермь, 2014). Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2014. С. 249-253.

REFERENCES

1. Leech C.M., Hearle J.W.S, Overington M.S., Banfield S.J. Modelling tension and torque properties of fibre ropes and splices // Third International Offshore and Polar Engineering Conference (Singapore, 6-11 June, 1993), pp. 370-376.

2. Bolotnyy A.P., Sysoeva E.K., Protalinskiy S.E. *Analiz razrusheniy nitey v protsesse pererabotki na tkatskikh perekhodakh* [Analysis of the destruction of the filaments during processing in textile transitions]. *Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta*, 2002. No 5, pp. 46-48.

3. Volokhovskiy V.Yu., Vorontsov A.N., Kagan A.Ya. *Veroyatnostnaya otsenka prochnosti stal'nykh kanatov po dannym magnitnoy defektoskopii* [Probabilistic strength assessment of steel ropes according to the magnetic flaw detection]. *Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta*, 2002. No 5, pp. 5-10.

4. Stepashkin A.A., Maksimkin A.V., Chukov D.I., Cherdyntsev V.V. *Opyt issledovaniya mekhanicheskikh svoystv vysokoprochnogo volokna na osnove sverkhvysokomolekulyarnogo polietilena* [Experience of study of mechanical properties of high-strength fibers based on ultrahigh molecular weight polyethylene]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2013. No 6. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=10755.

5. Venttsel' E.S. Teoriya veroyatnostey: uchebnik [Probability Theory: textbook]. Moscow: KNORUS Publ., 2010. 664 p.

6. Naumov V.A., Akhmedova N.R., Akhmedov I.M. *Analiz rezul'tatov ispytaniya prochnosti trekhpryadnykh kanatov iz polimernykh materialov* [Analysis of the results of the strength test trehprudnyj ropes from polymeric materials]. *Izvestiya KGTU*, 2015. No 36, pp. 43-51.

7. Velikanov N.L., Naumov V.A, Primak L.V., Akhmedov I.M. *Ispytaniya prochnosti kanatov iz polimernykh materialov* [Testing the strength of ropes made of polymer materials]. *Mekhanizatsiya stroitel'stva*, 2017. V. 78, No 4, pp. 30-35.

8. Lobanov D.S., Temerova M.S. *Osobennosti kvazistaticheskikh ispytaniy nitey i tkaney* [Features of quasi-static testing of yarns and fabrics]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2013. No 2, pp. 96–109.

9. Kobzar' A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika* [Applied mathematical statistics]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006. 816 p.

10. Temerova M.S., Vil'deman V.E. *Staticheskie i dinamicheskie ispytaniya lent i nitey steklotkani kak armiruyushchikh elementov kompozitsionnykh materialov* [Static and dynamic testing of tapes and fiberglass filaments as reinforcing elements in composite materials]. Matematicheskoe modelirovanie v estestvennykh naukakh. Materialy XXIII Vserossiyskoy shkoly-konferentsii molodykh uchenykh i studentov (Perm', 2014). Perm': PNIPU Publ., 2014, pp. 249-253.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Ахмедов Исфендияр Махмуд-оглы

Калининградский государственный технический университет, г. Калининград, Россия, аспирант кафедры водных ресурсов и водопользования

E-mail: isfendi@mail.ru

Ahmedov Isfendiar Mahmud-oglu

FSEI HE «Kaliningrad State Technical University», Kaliningrad, Russia, The post-graduate student of The Water Resources Department

E-mail: isfendi@mail.ru

Наумов Владимир Аркадьевич

Калининградский государственный технический университет, г. Калининград, Россия, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой водных ресурсов и водопользования, действительный член Российской инженерной академии, действительный член Российской академии естественных наук,

E-mail: van-old@rambler.ru

Naumov Vladimir Arkad'evich

Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia, Chairman of The Water Resources Department, Doctor of Technical Science, Professor, Member of Russian Engineering Academy, Member of Russian Academy of Natural Science,

E-mail: van-old@rambler.ru

Корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с авторами статьи:
236022, Россия, Калининград, Советский пр., 1, КГТУ, ГУК, каб. 372. Наумов В.А.
8(4012)99-53-37