



УДК 66.011

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА МАССОПЕРЕНОСА ИОНОВ  
ВОДОРАСТВОРИМЫХ ПРИМЕСЕЙ ПРИ ОТМЫВКЕ ПИГМЕНТОВ  
ПРИ РЕПУЛЬПАЦИИ-ДЕКАНТАЦИИ**

В.С. Орехов, А.А. Дегтярев, А.Ю. Осетров, Д.А. Богачев

**MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE PROCESS OF MASS TRANSFER OF  
WATER-SOLUBLE IONS OF IMPURITIES BY WASHING PIGMENTS  
BY REPULPATION-DECANTATION**

V.S. Orekhov, A.A. Degtyarev, A.Yu. Osetrov, D.A. Bogachev

**Аннотация.** Представлена физическая модель и описание процесса массопереноса ионов водорастворимых примесей, расположенных вокруг частицы пигмента в суспензии при ее перемешивании и отстаивании. Математические зависимости позволяют рассчитать концентрации водорастворимых примесей на поверхности частиц пигмента и определить технологические параметры процесса отмывки пигмента репульпацией-декантацией, обеспечивающего требуемое качество готового продукта (колористическая концентрация, светлота, чистота).

**Ключевые слова:** *массоперенос; пигмент; водорастворимые примеси; репульпация; декантация.*

**Abstract.** A physical model and a description of the process of mass transfer of ions of water-soluble impurities, arranged around the pigment particles in the slurry during its mixing and standing was present. Mathematical dependences allow to calculate the concentration of water-soluble impurities on the surface of the pigment particles and determine the technological parameters of the process of washing, decantation repulping pigment that provides the required quality of the finished product (coloristic density, lightness, purity).

**Key words:** *mass transfer; pigment; water-soluble impurities repulping; decantation.*

Краски, используемые при высокоскоростной печати, получают при использовании в качестве цветообразующих наполнителей пигментов, содержащих минимальное количество водорастворимых примесей. Наличие сорбционного слоя на поверхности частиц пигмента способствует образованию агломератов в офсетной краске, что приводит к неоднородности цветового покрытия. Увеличение адгезионных свойств частиц пигмента в связующем компоненте можно обеспечить удалением примесей, способных формировать на поверхности частиц пигмента сорбционный слой ионов водорастворимых примесей. Решение о выборе того или иного способа удаления водорастворимых примесей принимается на основе оценки эффективности их удаления тем или иным способом. Из-за многообразия физико-химических свойств суспензий пигментов, а так же из-за недостаточной изученности влияния их на кинетические характеристики выбираемого процесса возникает сложность при выборе метода удаления водорастворимых примесей.

Способ удаления водорастворимых примесей из суспензий пигментов многократной репульпацией-декантацией позволяет обеспечить требуемые показатели качества готового продукта при одновременном снижении расхода промывной жидкости [1].

Целью данной работы является разработка физической модели и описание процесса удаления водорастворимых примесей из жидкой фазы суспензии и осадка при проведении многократной репульпации-декантации.

Для определения технологических и кинетических параметров процесса отмывки пигментов репульпацией-декантацией было разработано его математическое описание на основе физической модели массопереноса ионов водорастворимых примесей, расположенных на поверхности частиц пигмента (рис. 1).

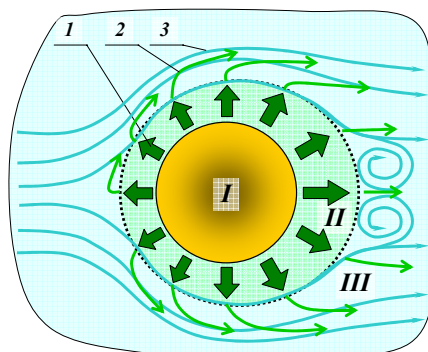


Рисунок 1 – Модель переноса ионов водорастворимых примесей с поверхности частиц в промывную жидкость при репульпации-декантации: *I* – частица пигмента; *II* – диффузионный слой; *III* – промывная жидкость; *1* – поток ионов водорастворимых примесей в диффузионном слое, *2* – поток ионов водорастворимых примесей в промывную жидкость (с границы диффузионного слоя в поток промывной жидкости), *3* – поток промывной жидкости

Ионы водорастворимых примесей с поверхности частиц к границе диффузионного слоя переходят за счет молекулярной диффузии [2-4]. Перенос ионов водорастворимых примесей диффузионного слоя в репульпационную жидкость осуществляется конвективной или турбулентной диффузией.

Процесс удаления водорастворимых примесей многократной репульпацией-декантацией складывается из следующих стадий: перемешивание осадка с промывной жидкостью, при этом перенос ионов водорастворимых примесей из диффузионного слоя в репульпационную жидкость осуществляется турбулентной диффузией; формирование осадка осаждением, при этом перенос ионов водорастворимых примесей из диффузионного слоя в репульпационную жидкость происходит за счет конвективной диффузии.

Достижение равновесного состояния процесса диффузии намного меньше, чем процесса десорбции ионов водорастворимых примесей с поверхности частиц пигмента.

При разработке математического описания процессов репульпации и декантации были приняты следующие допущения:

1. не учитывался конвективный перенос масс в пограничном диффузионном слое;
2. процесс переноса ионов водорастворимых примесей квазистационарный, то есть скорости всех стадий равны между собой и количество водорастворимых примесей, ушедших с поверхности частиц пигментов в данный момент времени, равно количеству примесей, пришедших в ядро потока жидкой фазы;
3. при репульпации суспензий пигментов турбулентный массоперенос ионов превалирует над конвективным, так как плотности пигмента и промывной жидкости близки;
4. необходимо было пренебрегать неравномерностью диффузионного потока ионов водорастворимых примесей в пограничном слое.

Для моделирования процесса переноса ионов водорастворимых примесей с поверхности частиц пигмента в ядро потока промывной жидкости используется подход, аналогичный модели движения фронта химической реакции из теории гетерогенных химических процессов [5].

Процесс массопереноса водорастворимых примесей в суспензии пигментов при репульсации представлен на рис. 1. Распределение концентрации ионов в пространстве, окружающем частицу, изображено на рис. 2.

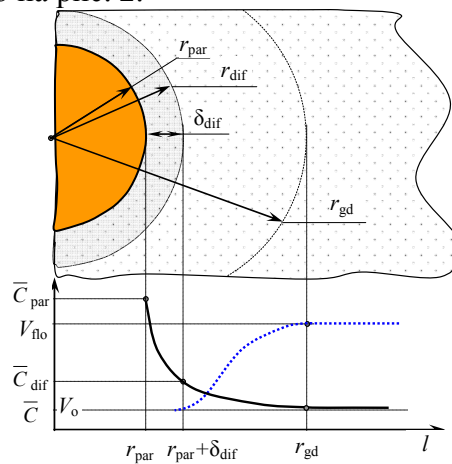


Рисунок 2 – Профиль концентраций ионов водорастворимых примесей в пространстве, окружающем частицу пигмента:  $r_{\text{par}}$  – радиус частицы пигмента;  $r_{\text{dif}}$  – радиус диффузионного слоя;  $r_{\text{gd}}$  – радиус гидродинамического слоя  $C_{\text{par}}$  – концентрация ионов водорастворимых примесей на поверхности частицы пигмента;  $C_{\text{dif}}$  – концентрация ионов водорастворимых примесей на границе диффузионного слоя;  $C_{\text{liq}}$  – концентрация ионов водорастворимых примесей в потоке промывной жидкости;  $v_{\text{flo}}$  – скорость потока промывной жидкости;  $v_o$  – скорость промывной жидкости на границе диффузионного слоя;  $\delta_{\text{dif}}$  – толщина диффузионного слоя;  $l$  – координата

Концентрацию ионов водорастворимых примесей на поверхности частиц и в жидкой фазе выразим в виде следующей зависимости:  $C \in [C_{\text{par}}; C_{\text{liq}}]$ . Процесс массопереноса при перемешивании необходимо рассматривать как процесс, состоящий из трех стадий: десорбция ионов с поверхности частиц пигмента; молекулярная диффузия ионов водорастворимых примесей через диффузионный слой жидкости толщиной  $\delta_{\text{dif}}$ ; турбулентная диффузия с поверхности диффузионного слоя в ядро потока промывной жидкости.

Кинематическая вязкость воды составляет  $10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с, коэффициент молекулярной диффузии ионов примесей в воде равен  $10^{-9}$ – $10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с, следовательно  $\nu/D \gg 1$ . Для таких процессов пограничный диффузионный слой смещается в гидродинамический поток. Тогда можно предположить, что скорость жидкости в диффузионном слое достаточно мала, и ей можно пренебречь.

Согласно принятым допущениям должно выполняться условие равенства скоростей всех трех стадий

$$W_{\text{ads}} = W_{\text{m}} = W_{\text{t}} = \frac{1}{N} \frac{dC}{d\tau}. \quad (1)$$

Скорость десорбции ионов водорастворимых примесей с поверхности частиц пигмента рассчитывается по уравнению

$$W_{\text{ads}} = 4\pi r_{\text{par}}^2 \beta_{\text{ads}} (C_{\text{ads}} - C_{\text{par}}) \quad (2)$$

где  $\beta_{\text{ads}}$  – коэффициент массоотдачи ионов с частиц пигмента в жидкую фазу;  $C_{\text{ads}}$  – концентрация ионов адсорбированных на поверхности частиц пигмента;  $E$  – коэффициент

пропорциональности равен отношению равновесной концентрации ионов водорастворимых примесей в жидкой фазе к концентрации этих ионов на поверхности частиц пигмента;  $C_{\text{par}}$  – концентрация ионов в жидкой фазе у поверхности частицы пигмента.

Уравнение (2) записано с учетом допущения о линейной зависимости концентраций  $C_{\text{ads}}$  и  $C_{\text{par}}$ . Скорость процесса диффузии ионов водорастворимых примесей через неподвижный слой будет определяться по уравнению:

$$W_m = -4\pi r^2 D_m \frac{dC}{dr}, \quad (3)$$

где  $D_m$  – коэффициент молекулярной диффузии ионов водорастворимых примесей в жидкой фазе.

При допущении о квазистационарности процесса уравнение (3) приводится к виду [4]:

$$W_m = \frac{4\pi D_m r_{\text{par}} (r_{\text{par}} + \delta_{\text{dif}})}{\delta_{\text{dif}}} (C_{\text{par}} - C_{\text{dif}}) \quad (4)$$

Скорость процесса турбулентной диффузии ионов водорастворимых примесей в ядро потока промывной жидкости будет рассчитываться по уравнению:

$$W_t = -4\pi r^2 D_t \frac{dC}{dr} \quad (5)$$

При рассмотрении турбулентной диффузии, по аналогии с молекулярной, необходимо решить систему уравнений [5]:

$$\begin{cases} \frac{A}{\infty} + B = C_{\text{liq}}, \\ \frac{A}{r_{\text{par}} + \delta_{\text{dif}}} + B = C_{\text{dif}}. \end{cases} \quad (6)$$

Решая систему уравнений (6) получаем:

$$A = (C_{\text{dif}} - C_{\text{liq}})(r_{\text{par}} + \delta_{\text{dif}}) \quad (7)$$

$$\frac{d\bar{c}}{dr} = \frac{A}{r^2} = \frac{(C_{\text{dif}} - C_{\text{liq}})(r_{\text{par}} + \delta_{\text{dif}})}{r^2} \quad (8)$$

Скорость турбулентной диффузии:

$$W_t = 4\pi D_t (r_{\text{par}} + \delta_{\text{dif}}) (C_{\text{dif}} - C_{\text{liq}}). \quad (9)$$

Скорости, рассчитанные по зависимостям (3), (4), и (9), должны быть равны.

Сопротивление каждого из процессов переноса ионов водорастворимых примесей выражается следующим образом:



$$R_{\text{ads}} = \frac{1}{4\pi r_{\text{par}} \beta}, \quad (10)$$

$$R_{\text{m}_d} = \frac{\delta_{\text{dif}}}{4\pi r_{\text{par}} (r_{\text{par}} + \delta_{\text{dif}}) D_m}. \quad (11)$$

$$R_{\text{t}_d} = \frac{1}{4\pi (r_{\text{par}} + \delta_{\text{dif}}) D_t}. \quad (12)$$

Скорость процесса массопереноса ионов с поверхности частиц в ядро потока промывной жидкости определяется из систем уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{dC}{d\tau} = \frac{1}{R_{\text{ads}}} \left( \frac{C_{\text{ads}}}{E} - C_{\text{par}} \right), \\ \frac{1}{N} \frac{dC}{d\tau} = \frac{1}{R_m} (C_{\text{par}} - C_{\text{dif}}), \\ \frac{1}{N} \frac{dC}{d\tau} = \frac{1}{R_t} (C_{\text{dif}} - C_{\text{liq}}). \end{cases} \quad (13)$$

Оставляя в правой части зависимостей (13) только концентрации ионов водорастворимых примесей, получаем:

$$\begin{cases} \frac{1}{N} \frac{dC}{d\tau} R_{\text{ads}} = \left( \frac{C_{\text{ads}}}{E} - C_{\text{par}} \right), \\ \frac{1}{N} \frac{dC}{d\tau} R_m = (C_{\text{par}} - C_{\text{dif}}), \\ \frac{1}{N} \frac{dC}{d\tau} R_t = (C_{\text{dif}} - C_{\text{liq}}). \end{cases} \quad (14)$$

Суммируя уравнения системы (14) получаем зависимость:

$$\frac{1}{N} \frac{dC}{d\tau} (R_{\text{ads}} + R_m + R_t) = \left( \frac{C_{\text{ads}}}{E} - C_{\text{liq}} \right). \quad (15)$$

Уравнение для расчета концентрации ионов водорастворимых примесей в жидкой фазе имеет вид:

$$\frac{dC}{d\tau} = \frac{N}{(R_{\text{ads}} + R_m + R_t)} \left( \frac{C_{\text{ads}}}{E} - C_{\text{liq}} \right). \quad (16)$$

Концентрацию ионов на поверхности частиц находим из уравнения материального баланса:

$$F_{\text{sld}} (C_{\text{ads0}} - C_{\text{ads}}) = V_{\text{liq}} (C_{\text{liq}} - C_{\text{liq0}}).$$

Отсюда



$$C_{ads} = C_{ads0} - \frac{F_{sld} \alpha_{all}}{1 - \alpha_{all}} (C_{liq} - C_{liq0}). \quad (17)$$

С учетом зависимости (17) уравнение (16) преобразуется к виду:

$$\frac{dC}{d\tau} = \frac{N}{E(R_{ads} + R_m + R_t)} \left( C_{ads0} - \frac{F_{sld} \alpha_{all}}{1 - \alpha_{all}} (C_{liq} - C_{liq0}) - EC_{liq} \right). \quad (18)$$

Концентрацию частиц пигмента в суспензии можно определить по зависимости

$$N = \frac{V_{sid}}{V_{par}} \frac{1}{V_{all}} = \frac{\omega_{all}}{1 - \omega_{all}} \frac{1}{V_{all}} = \frac{3\omega_{all}}{4\pi \cdot (1 - \omega_{all}) \cdot r_{par}^3}. \quad (19)$$

Для определения концентрации ионов водорастворимых примесей в потоке промывной жидкости по зависимости (18) необходимо знать толщину диффузионного слоя ( $\delta_{dif}$ ), коэффициент пропорциональности ( $E$ ) и коэффициенты массоотдачи при десорбции ионов с поверхности частиц ( $\beta$ ) молекулярной ( $D_m$ ) и турбулентной ( $D_t$ ) диффузией этих ионов.

Равновесные концентрации  $C_{sld} \leq EC_{ads}$  при репульсации могут быть достигнуты на стадии декантации суспензии пигментов. При этом частица пигмента движется в промывной жидкости со скоростью:

$$v_{coc} = \frac{2(\rho_{liq} - \rho_{sld})r_{par}^2 g (1 - \omega_{all})^2 (1 - 2.5\omega_{all})}{9 \mu (1 - 1.164\omega_{all})^{2/3}}. \quad (20)$$

При этом образуется осадок с концентрацией твердой фазы, определяемой по формуле

$$N_{sed} = \frac{3\omega_{sed}}{4\pi r_{par}^3}. \text{ Время формирования осадка с определенной концентрацией твердой фазы}$$

$$\tau_{coc} = \frac{Z(N_{sed} - N_{all})}{v_{coc} N_{sed}}.$$

Изменение концентрации в диффузионном слое и на поверхности частиц пигмента можно определить по уравнениям (17) и (18). Заменив в уравнении (18) сопротивление турбулентной диффузии на сопротивление конвективной диффузии, получаем зависимость:

$$R_k = \frac{1}{4\pi \cdot \beta_k r_{par}^2}, \quad (20)$$

где  $\beta_k$  – коэффициент массоотдачи при конвективной диффузии.

Определение коэффициента  $\beta_k$  возможно при условии рассмотрения модели обтекания сферической частицы [6] и использовании критериальных зависимостей: критерий Пекле

$$Re_D = \frac{vl}{D_m} \text{ и критерий Шервуда } Sh = \frac{\beta l}{D_m}, \text{ где } l \text{ – поперечный размер обтекаемой частицы; } v$$

– скорость обтекания частицы;  $\beta$  – коэффициент массоотдачи.

При стационарном массопереносе обтекания сферической частицы используются зависимости соотношения критериев Пекле и Шервуда [3], работающие в интервале чисел Пекле  $0 < Re < 1 \times 10^4$



$$\text{Sh} = (4.0 + 1.21\text{Pe}^{2/3})^{0.5} \text{ или } \text{Sh} = \frac{0.333\text{Pe}^{0.84}}{1 + 0.331\text{Pe}^{0.507}}.$$

Зная скорость осаждения частицы в жидкой фазе, ее размеры, коэффициент молекулярной диффузии ионов водорастворимых примесей, можно рассчитать коэффициент массоотдачи для процесса конвективного массопереноса ионов водорастворимых примесей.

### Заключение

Использование предложенных математических зависимостей для расчета концентраций водорастворимых примесей на поверхности частиц пигмента, позволяет определить технологические параметры процесса отмывки пигмента репульпацией и декантацией (время составляющих процесса, количество циклов отмывки), обеспечивающие требуемое качество готового продукта (колористическая концентрация, светлота, чистота).

### Обозначения

- $C$  – концентрация ионов водорастворимых примесей,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;
- $D$  – коэффициент диффузии,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;
- $E$  – коэффициент пропорциональности;
- $g$  – ускорение свободного падения,  $\text{м}/\text{с}^2$ ;
- $l$  – поперечный размер обтекаемой частицы,  $\text{м}$ ;
- $N$  – количество частиц твердого вещества в элементе объема,  $\text{шт}/\text{м}^3$ ;
- $R$  – сопротивление;
- $r$  – радиус,  $\text{м}$ ;
- $V$  – объем,  $\text{м}^3$ ;
- $W$  – скорость,  $\text{кг}/\text{м}^2\text{с}$ ;
- $Z$  – высота столба жидкости в аппарате,  $\text{м}$ ;
- $\text{Pe}$  – критерий Пекле;
- $\text{Sh}$  – критерий Шервуда;
- $\beta$  – коэффициент массоотдачи,  $\text{м}/\text{с}$ ;
- $\delta$  – толщина,  $\text{м}$ ;
- $\mu$  – динамическая вязкость,  $\text{Па}\cdot\text{с}$ ;
- $v$  – скорость обтекания частицы,  $\text{м}/\text{с}$ ;
- $\rho$  – плотность,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;
- $\tau$  – время,  $\text{с}$ ;
- $\nu$  – кинематическая вязкость,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;
- $v$  – скорость,  $\text{м}/\text{с}$ ;
- $\omega$  – объемная доля твердой фазы в единице объема  $\text{м}^3/\text{м}^3$ .

### Индексы

- $0$  – начальное значение;
- ads – адсорбированный;
- all – полный объем суспензии;
- sos – соосаждение;
- dif – диффузионный;
- gd – гидродинамический;
- k – конвективная диффузия;
- liq – промывная жидкость;
- m – молекулярная диффузия;
- par – поверхность частиц пигмента;
- pas – паста;





sed – в осадке;  
sld – в твердой фазе пигмента;  
t – турбулентная диффузия.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Орехов В.С., Субочева М.Ю. Создание растворителя, обеспечивающего максимальное удаление водорастворимых солей из паст органических пигментов в процессе отмывки // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского, 2011. № 1(32). С. 382-385.
2. Modeling the Process of the Removal of Water-Soluble Admixtures from Finely Dispersed Precipitates / Orekhov V.S., Leont'eva A.I., Degtyarev A.A., Subocheva M.Yu. // Theoretical Foundations of Chemical Engineerin., 2013. Vol. 47. No. 6. P. 772-778.
3. Рудобашта С.П., Карташов Э.М. Диффузия в химико–технологических процессах. М.: Колос, 2010. 480 с.
4. Шервуд Т., Пигфорд Р, Уилки Ч. Массопередача. М.: Химия, 1982. 696 с.
5. Апостолова Е.С., Михайлюк А.И., Цирельсон В.Г. Квантово–химическое описание реакций. М.: РХТУ, 1999. 61 с.
6. Аксельруд Г.А. Массообмен в системе твердое тело–жидкость. Львов: Изд. Львов. ун-та, 1970. 186 с.

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

*Орехов Владимир Святославович*

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Химия и химические технологии»,

E-mail: [htov@mail.tambov.ru](mailto:htov@mail.tambov.ru)

*Orekhov Vladimir Svyatoslavovich*

FGBOU VPO «Tambov State Technical University», Tambov, Russia, Candidate of Technical Science, associate Professor of Department «Chemistry and chemical technology»,

E-mail: [htov@mail.tambov.ru](mailto:htov@mail.tambov.ru)

*Дегтярев Андрей Александрович*

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Химия и химические технологии»,

E-mail: [htov@mail.tambov.ru](mailto:htov@mail.tambov.ru)

*Degtyarev Andrey Aleksandrovich*

FGBOU VPO «Tambov State Technical University», Tambov, Russia, Candidate of Technical Science, associate Professor of Department «Chemistry and chemical technology»,

E-mail: [htov@mail.tambov.ru](mailto:htov@mail.tambov.ru)

*Осетров Александр Юрьевич*

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия, кандидат химических наук, доцент кафедры «Химия и химические технологии»,

E-mail: [ksanset@list.ru](mailto:ksanset@list.ru)





*Osetrov Aleksandr Yur'evich*

FGBOU VPO «Tambov State Technical University», Tambov, Russia, Candidate of Chemical Science, associate Professor of Department «Chemistry and chemical technology»,  
E-mail: [ksanset@list.ru](mailto:ksanset@list.ru)

*Богачев Дмитрий Анатольевич*

ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет», г. Тамбов, Россия, аспирант кафедры «Химия и химические технологии»,  
E-mail: [htov@mail.tambov.ru](mailto:htov@mail.tambov.ru).

*Bogachev Dmitriy Anatol'evich*

FGBOU VPO «Tambov State Technical University», Tambov, Russia, graduate student of Department «Chemistry and chemical technology»,  
E-mail: [htov@mail.tambov.ru](mailto:htov@mail.tambov.ru).

Корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с авторами статьи:  
392000, Тамбов, ул. Ленинградская, 1, ТГТУ, каб. 17, Осетров А.Ю.  
8(4752)63-03-71, 8(4752)63-89-56