УДК 511.41+517.927.2

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ АППРОКСИМАЦИЙ ПАДЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

И.Г. Величко, И.Г. Ткаченко, В.В. Балабанова

PREPARATION METHOD OF CONTINUED FRACTIONS FOR CONSTRUCTION PADE APPROXIMATIONS OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

I.G. Velichko, I.G. Tkachenko, V.V. Balabanova

Аннотация. В статье представлен способ вычисления рациональных аппроксимаций функций, которые являются решениями задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Этот способ основан на применении функциональных цепных дробей. Он является обобщением подхода Лагранжа для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. На примерах показано, что полученные приближения являются аппроксимациями Паде точных решений.

Ключевые слова: *цепная дробь; задача Коши; аппроксимация Паде; ряд Маклорена; уравнение Риккати.*

Abstract. This article covers numerical method solved problem Cauchy for differentials equations first orders. This methodic used idea of Joseph Louis Lagrange. On every step unknown function sought in the form rational expression. The results is continued fraction. After the equivalent transformation we have approximation Pade of solution problem Cauchy. In the literature no examples of solved problem Cauchy for continued fraction. In this article we adduct three examples, show of relations constructed approximations wits fraction Pade appropriate order. In article formulated algorithm computation of the first and the following approximations and considered linear and nonlinear differential equations.

Key words: *continued fraction; the Cauchy problem; Pade approximation; Maclaurin series; Riccati equation.*

Введение

Во многих источниках, посвященных приложениям цепных дробей, встречается замечание, что с их помощью можно решать дифференциальные уравнения. Например, к таким работам можно отнести [1, 2], где приведено решения уравнений Риккати. Методика решений таких уравнений приведена в книге [3], в которой нет ни одного разобранного примера. Авторам статьи не удалось найти в литературе примеров, явно иллюстрирующих указанный метод.

Целью данной работы есть демонстрация соответствующей техники путем построения приближенных решений конкретных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Суть метода. Согласно [3], идея Жозефа Луи Лагранжа состоит в следующем. Пусть нам дано дифференциальное уравнение $L(x, y, y') = 0$ и начальное условие $y(x_0) = y_0$. Без ограничения общности считаем, что начальное условие задано в окрестности точки $x_0 = 0$. На первом этапе решение $y(x)$ в окрестности точки $x = 0$ мы ищем в виде

$$y(x) = \xi_0(x)/(1 + y_1(x)), \tag{1}$$

где $y_1(x)$ – новая неизвестная функция, а $\xi_0(x)=C_0 x^{\alpha_0}$ – функция, такая, что при $x\approx 0$ имеет место соотношение $y(x)\approx\xi_0(x)$. Полагая в (1) $y_1(x)=0$, получаем первое приближение в виде $y(x)=\xi_0(x)$.

На втором этапе, после подстановки (1) в исходное уравнение, получаем преобразованное уравнение $L_1(x,y_1,y_1')=0$ относительно неизвестной функции $y_1(x)$. Его решение снова ищется в виде

$$y_1(x)=\xi_1(x)/(1+y_2(x)), \tag{2}$$

где $y_2(x)$ – новая неизвестная функция и при $x\approx 0$ имеет место соотношение $y(x)\approx\xi_1(x)=C_1 x^{\alpha_1}$. В результате получается решение в виде следующей цепной дроби

$$y(x)=\cfrac{\xi_0(x)}{1+\cfrac{\xi_1(x)}{1+y_2(x)}}. \tag{3}$$

Полагая в (3) $y_2(x)=0$, получаем второе приближение в виде

$$y(x)=\xi_0(x)/(1+\xi_1(x)).$$

Продолжая этот процесс и далее, мы получаем решение с необходимой точностью.

Численные примеры

Пример 1. Для примера рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=2y \tag{4}$$

с начальным условием

$$y(0)=1, \tag{5}$$

точное решение которого имеет вид $y(x)=e^{2x}$.

Решение ищем в окрестности точки $x_0=0$. Поскольку по условию $y(0)=1$, то полагаем что $\xi_0=1$ и ищем решение в виде

$$y=1/(1+y_1). \tag{6}$$

Отметим, что полученное первое приближение имеет вид $\tilde{y}_1(x)=1$.

Находим производную $y'=\dfrac{-y_1'}{(1+y_1)^2}$ и подставляем в исходное дифференциальное уравнение (4):

$$\frac{-y_1'}{(1+y_1)^2}=\frac{2}{1+y_1}.$$

После упрощений получим:

$$y_1' + 2y_1 + 2 = 0. \qquad (7)$$

Подставляя (5) в (6), получим граничное условие относительно новой функции $y_1(x)$:

$$y_1(0) = 0. \qquad (8)$$

Решение (7), с учетом условия (8), ищем в виде $y_1 = Cx^{\alpha}$. Подставляя это выражение в дифференциальное уравнение (7), получим

$$C\alpha x^{\alpha-1} + 2Cx^{\alpha} + 2 = 0.$$

Подберем константы C и α так, чтобы слагаемое минимальной степени, не содержащее этих констант, исчезло со слагаемым минимальной степени, содержащее эти константы. Получим, что $\alpha = 1$, $C = -2$, и, следовательно, $\xi_1(x) = -2x$.

Полагаем, что

$$y_1 = -2x/(1 + y_2). \qquad (9)$$

Таким образом, второе приближение к решению имеет вид $\tilde{y}_2(x) = 1/(1-2x)$.

Продифференцировав (9), находим что

$$y_1' = -2 \cdot \frac{1 + y_2 - xy_2'}{(1 + y_2)^2}. \qquad (10)$$

Подставляя (9) и (10) в (7), получим:

$$-2 \cdot \frac{1 + y_2 - xy_2'}{(1 + y_2)^2} - \frac{4x}{1 + y_2} + 2 = 0.$$

После приведения к общему знаменателю имеем:

$$1 + y_2 - xy_2' + 2x(1 + y_2) - (1 + y_2)^2 = 0.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим уравнение Риккати [4]:

$$xy_2' + y_2(1 - 2x) + y_2^2 = 2x. \qquad (11)$$

Заметим, что после второго этапа мы пришли к уравнению Риккати, и далее этот тип уравнений будет возникать и на следующих этапах. Поэтому, если мы хотим найти уравнение, которое указанным методом можно довести до конца, то в качестве исходного уравнения нужно брать именно уравнение Риккати со специально подобранными коэффициентами. Этому посвящен целый раздел в [3].

Функцию $y_2(x)$ ищем в виде $y_2 = Cx^{\alpha}$. Подставляя это выражение в (11), получим:

$$C\alpha x^{\alpha} + Cx^{\alpha}(1 - 2x) + C^2x^{2\alpha} = 2x.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения, находим, что $C(\alpha+1)x^{\alpha}=2x$. Отсюда определяем $\alpha=1$, $C=1$, и, следовательно, $\xi_2(x)=x$.

Согласно теории, полагаем, что

$$y_2=x/(1+y_3). \tag{12}$$

Третье приближение к решению имеет вид

$$\widetilde{y}_3(x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{2x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}.$$

Для получения следующего приближения Подставляем (12) в (11). После тождественных преобразований получим уравнение

$$xy_3'+2y_3(1+x)+2y_3^2=-x. \tag{13}$$

Подставляя в (13) выражение $y_3=Cx^{\alpha}$, получим

$$C(\alpha+2)x^{\alpha}+2Cx^{\alpha+1}+2C^2x^{2\alpha}=-x.$$

Приравнивая минимальные степени, получим равенство $C(\alpha+2)x^{\alpha}=-x$, откуда определяем, что $\xi_3(x)=-x/3$. Согласно теории, полагаем, что

$$y_3=(-x/3)/(1+y_4). \tag{14}$$

Четвертое приближение к решению имеет вид

$$\widetilde{y}_4(x)=\cfrac{1}{1-\cfrac{2x}{1+\cfrac{x}{1-\cfrac{x}{3}}}}.$$

Очевидно, что полученные решения можно уточнять и дальше.

Полученные нами приближения $\widetilde{y}_i(x), i=\overline{1;4}$ есть приближениями Паде типа (m,n) к точному решению: $\widetilde{y}_1(x)$ – аппроксимация Паде степени $(0,0)$, $\widetilde{y}_2(x)$ – степени $(0,1)$, $\widetilde{y}_3(x)$ – степени $(1,1)$ и $\widetilde{y}_4(x)$ – степени $(1,2)$.

Разложения в ряд Маклорена точного и приближенных решений имеют вид:

$$e^{2x}=1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\ldots,$$

$$\widetilde{y}_1=1,\ \widetilde{y}_2=\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+8x^3+\ldots,$$

$$\tilde{y}_3 = \frac{1+x}{1-x} = 1+2x+2x^2+2x^3+\ldots,$$
$$\tilde{y}_4 = \frac{3+2x}{3-4x+2x^2} = 1+2x+2x^2+\frac{4}{3}x^3+\ldots.$$

На рисунке 1 изображен график точного решения, а также графики трех первых приближений к нему.

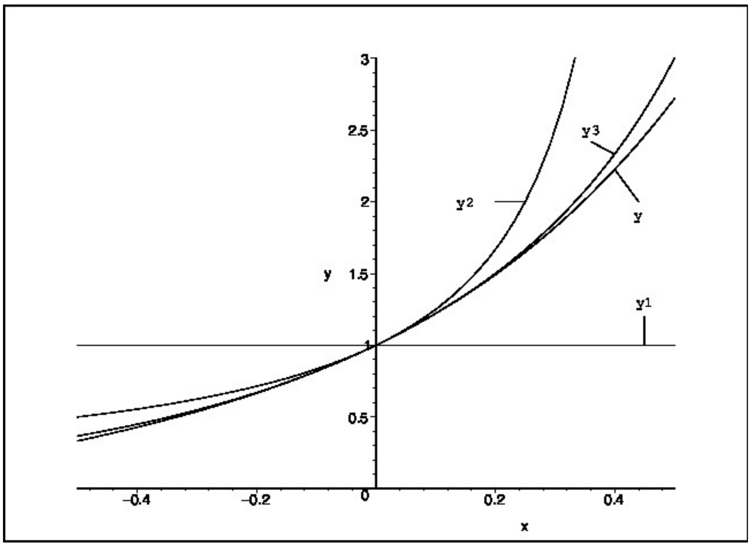

Рисунок 1 – График точного решения дифференциального уравнения (4) и его приближения

Перейдем к уравнениям, содержащим трансцендентные функции.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши

$$y' + y = \sin x,\ y(0) = 0, \tag{15}$$

решение которой имеет вид $y = 0{,}5\left(e^{-x} + \sin x - \cos x\right)$.

Подставляя выражение $y = Cx^{\alpha}$ в (15) и раскладывая функцию $\sin x$ в ряд Маклорена, получим $C\alpha x^{\alpha-1} + Cx^{\alpha} = x + o(x)$. Приравнивая минимальные степени x, будем иметь, что $C\alpha x^{\alpha-1} = x$, откуда определяем, что $\alpha = 2, C = \frac{1}{2}$. Значит $\xi_0 = x^2/2$ и ищем решение в виде

$$y = \xi_0/(1+y_1) = x^2/(2(1+y_1)). \tag{16}$$

Первое приближение $\tilde{y}_1 = x^2/2$.

Подставляя (16) в (15), после упрощения, получим

$$2x + 2y_1x - x^2y_1' + x^2(1+y_1) = 2(1+y_1)^2 \sin x. \tag{17}$$

В полученном уравнении Риккати перенесем все слагаемые, не содержащие y_1, в правую часть, а остальные – в левую, будем иметь:

$$2y_1x-x^2y_1'+x^2y_1-4y_1\sin x-2y_1^2\sin x=-x^2+2(\sin x-x).$$

Для нахождения функции $\xi_1(x)$ подставим выражение $y=Cx^{\alpha}$ в (15) и учтем, что при $x\to 0$ имеют место оценки $2(\sin x-x)=-x^3/3+\ldots=o(x^2)$ и $\sin x=x+o(x^2)$. Получим:

$$2Cx^{\alpha+1}-C\alpha x^{\alpha+1}+Cx^{\alpha+2}-4Cx^{\alpha}(x+\ldots)-2C^2x^{2\alpha}(x+\ldots)=-x^2+2(\sin x-x).$$

После того, как оставим только минимальные степени, получим

$$C(-\alpha-2)x^{\alpha+1}=-x^2.$$

Отсюда определяем, что $\alpha=1$, $C=1/3$, и, следовательно, $\xi_1(x)=x/3$. Второе приближение

$$\tilde{y}_2=\frac{x^2}{2\left(1+\frac{x}{3}\right)}=\frac{3x^2}{6+2x}.$$

Заметим, что разница между вторым приближением и точным решением

$$y-\tilde{y}_2=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{720}+\ldots\right)-\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{18}+\ldots\right)=O(x^4).$$

Вычисления показывают, что приближения $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ – аппроксимации Паде типа $(2,0)$ и $(2,1)$ соответственно. Запишем разложения в ряд Маклорена точного решения задачи Коши (15) и полученных приближений:

$$\frac{e^{-x}+\sin x-\cos x}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{720}-\ldots,$$
$$\tilde{y}_1=\frac{x^2}{2},\ \tilde{y}_2=\frac{3x^2}{6+2x}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{18}-\ldots\ .$$

Рассмотрим решение нелинейных дифференциальных уравнений.

Пример 3. Рассмотрим уравнение Лагранжа

$$2y(y'+2)=xy'^2 \qquad (18)$$

с начальным условием

$$y(0)=1, \qquad (19)$$

решение которого [4]

$$y(x)=(x-1)^2. \qquad (20)$$

Решение уравнения (18) ищем в виде

$$y(x) = 1/(1 + z_1(x)), \tag{21}$$

где функция $z_1(x)$ удовлетворяет условию $z_1(0) = 0$. Тогда первое приближение имеет вид:

$$\tilde{y}_1(x) = 1,$$

что является аппроксимацией Паде степени $(0, 0)$ к функции (20) [5].

Подставляем дробь (21) в исходное дифференциальное уравнение (18). После преобразований получаем новое дифференциальное уравнение относительно функции $z_1(x)$:

$$4 + z_1(x)[8 + 4z_1(x)] + z_1'(x)[x - 2 + xz_1(x)] = 0. \tag{22}$$

Раскладывая левую часть f последнего равенства в ряд Маклорена до первого ненулевого слагаемого, получаем, что

$$f = \underbrace{-2z_1'(0) + 4}_{a_0} + o(1).$$

Так как рассматривается однородное дифференциальное уравнение (22), что то же самое $a_0 = 0$, то получаем

$$z_1'(0) = 2,$$

и, следовательно, $z_1(x) = 2x + o(x)$.

Получили второе приближение к решению

$$\tilde{y}_2(x) = 1/(1 + 2x),$$

которое есть приближением Паде степени $(0, 1)$ функции решения (20).

Чтобы получить следующее приближение, функцию $z_1(x)$ ищем в виде:

$$z_1(x) = 2x/(1 + z_2(x)) \tag{23}$$

при условии, что $z_2(0) = 0$. Подставляем (23) в (22) и после упрощений получаем дифференциальное уравнение относительно новой неизвестной функции $z_2(x)$:

$$\begin{aligned}&12x + 48x^2 + 32x^3 + z_2(x)[4 + 48x + 12z_2(x) + 60xz_2(x) + 96x^2 + 24xz_2^2(x) + \\ &+ 48x^2 z_2(x) + 32x^3 + 12z_2^2(x) + 4z_2^3(x)] + z_2'(x)[4x + 8xz_2(x) + 4xz_2^2(x) + \\ &+ 16x^2 z_2(x) + 16x^2 - 4x^3 z_2'(x)] = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Аналогично написанному выше, раскладываем левую часть полученного уравнения в ряд Маклорена до первого ненулевого слагаемого. В этом случае это будет второе слагаемое a_1:

$$f = \underbrace{4z_2(0) + 12z_2^3(0) + 4z_2^4(0) + 12z_2^2(0)}_{a_0} +$$

$$+\underbrace{\left[8z_2'(0)+60z_2^2(0)+12+40z_2^2(0)z_2'(0)+32z_2(0)z_2'(0)+48z_2(0)+24z_2^3(0)\right]}_{a_1}x+o\left(x^2\right).$$

С учетом того, что $z_2(0)=0$, имеем:

$$f=\underbrace{\left[8z_2'(0)+12\right]}_{a_1}x+o\left(x^2\right).$$

А тогда

$$z_2'(0)=-18/8=-3/2.$$

То есть, $z_2(x)=-\dfrac{3}{2}x+o(x)$.

Итак, получили третье приближение к решению

$$\tilde{y}_3(x)=\frac{1}{1+\dfrac{2x}{1-\dfrac{3}{2}x}}=\frac{2-3x}{x+2},$$

которое совпадает с Паде-аппроксимацией $(1,1)$ точного решения (20).

Для уточнения решения следующее приближение функции $z_2(x)$ будем искать в виде:

$$z_2(x)=-\frac{3}{2}x\Big/(1+z_3(x)), \tag{25}$$

при условии, что $z_3(0)=0$. Подставляем (25) в (24) и упрощая, получаем дифференциальное уравнение относительно функции $z_3(x)$:

$$\begin{aligned}&4x\{-12x-16x^2-3x^3+z_3(x)\left[48-24x+\left(144+180x-312x^2\right)z_3(x)+48z_3^3(x)-\right.\\&-136x^2+384xz_3^2(x)+192xz_3^3(x)-64x^2z_3^2(x)+128x^2z_3^3(x)-36x^3-144x^3z_3(x)-\\&\left.-192x^3z_3^2(x)\right]+z_3'(x)\left[\left(48x+120x^2-73x^3\right)z_3(x)+\left(24+96x^2\right)z_3^2(x)+\right.\\&\left.+4x\left(4+4x-3x^2\right)-36x^4z_3'(x)\right]\}=0.\end{aligned}$$

Раскладываем левую часть полученного равенства в ряд Маклорена до первого ненулевого слагаемого. Получаем, что это будет слагаемое при x^2 (учитываем тот факт, что $z_3(0)=0$):

$$f=\underbrace{\left[288z_3'(0)-48\right]}_{a_2}x^2+o\left(x^2\right).$$

Отсюда

$$z_3'(0)=48/288=1/6,$$

а тогда $z_3(x)=\frac{x}{6}+o(x)$. Итак, получили четвертое приближение к решению

$$\widetilde{y}_3(x)=\cfrac{1}{1+\cfrac{2x}{1-\cfrac{\frac{3}{2}x}{1+\frac{x}{6}}}}=\frac{3-4x}{x^2+2x+3}.$$

Данное приближение совпадает с аппроксимацией Паде $(1,2)$ точного решения (20).

Запишем разложения в ряд Маклорена точного решения (20) и полученных приближений к решению:

$$y(x)=(x-1)^2=1-2x+x^2,\ \widetilde{y}_1(x)=1,\ \widetilde{y}_2(x)=\frac{1}{1+2x}=1-2x+4x^2-8x^3+\ldots,$$
$$\widetilde{y}_3(x)=\frac{2-3x}{x+2}=1-2x+x^2-\frac{x^3}{3}+\ldots,\ \widetilde{y}_4(x)=\frac{3-4x}{x^2+2x+3}=1-2x+x^2-\frac{x^4}{4}+\ldots.$$

Авторам статьи не известно упоминание в литературе того факта, что при решении дифференциальных уравнений методом цепных дробей полученные приближения являются приближениями Паде соответствующих степеней к решению. Заметим, что сама идея использования приближений Паде в теории дифференциальных уравнений не нова. Этот аппарат использован, к примеру, в работе [5] для доказательства существования решений системы дифференциальных уравнений при некоторых ограничениях.

Выводы

В статье приведены примеры реализации идеи Лагранжа применения цепных дробей к решению задач Коши для линейных уравнений первой степени. Рассмотрены случаи, когда в правой части уравнения находится многочлен и трансцендентная функция, а также приведено решение уравнения Лагранжа. Показано, что приближениями к решению являются рациональные выражения, первые элементы разложения которых в ряд Тейлора которых совпадают с соответствующими разложениями точных решений. Отмечено, что полученные приближения есть последовательными аппроксимациями Паде к точному решению. Совпадение приближенных решений дифференциальных уравнений, полученных при помощи описанного метода Лагранжа, и приближениями Паде этих решений, отмечено, по-видимому, авторами статьи впервые.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Маурер Г.В. Решение одного дифференциального уравнения Риккати с помощью цепных дробей // Цепные дроби и их применения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. С. 76-77.

2. Хлопонин С.С. Решение одного дифференциального уравнения Риккати с помощью цепной дроби Стилтьеса // Известия ВУЗов. Математика, 1969, № 3, С. 78-85.

3 Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: ГИИТЛ, 1956. 204 с.

4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 320 с.

5. Вишневский В.Э., Зубов А.В., Иванова О.А. Аппроксимация Паде решения задачи Коши // Вестн. С.-Петербург. ун-та, Прикл. матем. Информ. Проц. упр., 2012, № 4, С. 3-17.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Величко Игорь Георгиевич

Таврический государственный агротехнологический университет, г. Мелитополь, Украина, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и физики,

E-mail: wig64@mail.ru.

Velichko Igor Georgievich

Tavria State Agrotechnological University, Melitopol', Ukraine, Assoc. Professor of the Higher Mathematics and Physics Department, PhD.

E-mail: wig64@mail.ru.

Ткаченко Ирина Григорьевна

ГВУЗ «Запорожский национальный университет», г. Запорожье, Украина, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа.

E-mail: tig81@mail.ru.

Tkachenko Iryna Grigorivna

Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine, PhD, Assoc. Professor of the Mathematical Analysis Department at Zaporizhzhya National University.

E-mail: tig81@mail.ru.

Балабанова Валерия Витальевна

ГВУЗ «Запорожский национальный университет», г. Запорожье, Украина, студентка третьего курса математического факультета.

E-mail: balabanova23lera@mail.ru

Balabanova Valeriya Vitalievna

Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine, student of the Faculty of Mathematics of Zaporizhzhya National University.

E-mail: balabanova23lera@mail.ru.

Корреспондентский почтовый адрес и телефон для контактов с авторами статьи:
70000, Украина, Запорожская область, г. Вольнянск, ул. Зачиняева, д. 15, кв. 3. Ткаченко И.Г.
+38(066)99-44-825